MATEMATICAS 5

santillana

Índice

Tema 1. Conjuntos. 4

1. Formación o definición de conjuntos.
2. Relación de inclusión.
3. Conjunto complementario. Cambio de referencial.

Ejercicios y problemas.

Tema 2. Operaciones con conjuntos. 8

1. Intersección de conjuntos. Casos particulares.
2. Propiedades asociativa y conmutativa de la intersección de conjuntos.
3. Unión de conjuntos. Casos particulares.
4. Propiedades asociativa y conmutativa de la unión de conjuntos.
5. Cardinal del conjunto unión.

Ejercicios y problemas.

Tema 3. Relaciones. 14

1. Producto cartesiano.
2. Representación del producto cartesiano.
3. Correspondencia entre dos conjuntos.
4. Relación en un conjunto.
5. Relación de equivalencia.
6. Clasificaciones.
7. Relación de orden estricto.

Ejercicios y problemas.

Tema 4. Números naturales. 22

1. Aplicación biyectiva o biyección.
2. Conjuntos coordinables. Propiedad común.
3. La sucesión de números naturales.

Ejercicios y problemas.

Tema 5. Sistemas de numeración. 26

1. Sistema de numeración decimal.
2. Clases y órdenes.
3. Descomposición polinómica de números.
4. Sistema de numeración de base dos.

Ejercicios y problemas.

Tema 6. Adición y sustracción. Problemas. 32

1. Problemas combinados de sumar y restar. I.
2. Problemas combinados de sumar y restar. II.

Ejercicios y problemas.

Tema 7. Multiplicación de números naturales. Potencias. 36

1. Algunas multiplicaciones abreviadas.
2. Potencias. I.
3. Potencias. II.

Ejercicios y problemas.

Tema 8. División de números naturales. 42

1. División exacta. Equivalencias fundamentales.
2. División entera por defecto y división entera por exceso.
3. Prueba de la división.
4. Alteraciones del cociente en la división exacta.
5. Alteraciones del cociente y del resto en la división entera.
6. Práctica de la división. Casos.

Ejercicios y problemas.

Tema 9. Ángulos. Paralelas y perpendiculares. 50

1. Semirrectas y segmentos. Mediatriz de un segmento.
2. Ángulo. Bisectriz de un ángulo.
3. Trazado de rectas paralelas y de rectas perpendiculares con regla y escuadra.
4. Medidas de ángulos. Grados, minutos y segundos.
5. Medir ángulos con el transportador graduado.

Ejercicios y problemas.

Tema 10. Polígonos. Triángulos y cuadriláteros. 56

1. Polígonos. Clasificación. Polígonos convexos y polígonos cóncavos.
2. Polígonos regulares. Construcción.
3. Clases de triángulos según sus lados. Construcción gráfica de un triángulo conociendo sus lados.
4. Suma de los ángulos de un triángulo. Clases de triángulos según sus ángulos.
5. Cuadriláteros. Clasificación.
6. Paralelogramos. Clasificación.
7. Paralelogramos. Propiedades.

Ejercicios y problemas.

Tema 11. Fracciones. I. 64

1. Fracción. Términos.
2. La fracción como cociente exacto de dos números.
3. La fracción como resultado de una medida.
4. Operadores. Cadena de operadores.
5. Las fracciones como operadores.
6. Diversas interpretaciones de una fracción.

Ejercicios y problemas.

Tema 12. Fracciones. II. 72

1. Comparación de fracciones con la unidad.
2. Fracciones que representan un entero.
3. Los enteros de una fracción mayor que 1.
4. Comparación de fracciones sencillas.

Ejercicios y problemas.

Tema 13. Adición y sustracción de fracciones. I. 78

1. Suma de tracciones del mismo denominador.
2. Sustracción de fracciones del mismo denominador.
3. Fracciones equivalentes. Comprobación gráfica.

Ejercicios y problemas.

Tema 14. Adición y sustracción de fracciones. II. 82

1. Obtención de fracciones equivalentes.
2. Comparación de fracciones de distinto numerador y distinto denominador.
3. Suma y resta de fracciones de distinto denominador. (Casos sencillos.)

Ejercicios y problemas.

Tema 15. Números decimales. 86

1. Fracciones decimales.
2. Números decimales. I.
3. Números decimales. II.
4. Escritura de una fracción decimal en forma de número decimal y viceversa.
5. Comparación de números decimales.

Ejercicios y problemas.

Tema 16. Adición y sustracción de números decimales. 92

1. Suma de números decimales. I.
2. Suma de números decimales. II.
3. Resta de números decimales. I. Casos.
4. Resta de números decimales. II.

Ejercicios y problemas.

Tema 17. Multiplicación y división de números decimales. 98

1. Multiplicación y división por 10, 100 y 1.000.
2. Multiplicación de números decimales.
3. División de números decimales. I. Casos.
4. División de números decimales. II. Casos.
5. Aproximación de cocientes mediante decimales.

Ejercicios y problemas.

Tema 18. Longitud. 104

1. Sistema Métrico Decimal. El metro.
2. Múltiplos y submúltiplos del metro.
3. Relación entre las unidades de longitud.
4. Números complejos y números incomplejos.
5. Transformación de complejos de longitud en incomplejos, y viceversa.

Ejercicios y problemas.

Tema 19. Capacidad y masa. 110

1. Unidades de capacidad.
2. Relaciones entre las unidades de capacidad.
3. Cambio de unidad con el cuadro de unidades.
4. Transformación de complejos de capacidad en incomplejos y viceversa.
5. Unidades de masa.
6. Relaciones entre las unidades de masa.
7. Transformación de complejos de masa en incomplejos y viceversa.

Ejercicios y problemas.

Tema 20. Tiempo y dinero. 118

1. Unidades de tiempo. Sistema sexagesimal.
2. Complejos e incomplejos de tiempo. Transformaciones.
3. Suma en el sistema sexagesimal.
4. Resta en el sistema sexagesimal.
5. Unidades monetarias. La peseta, unidad monetaria española.

Ejercicios y problemas.

Tema 21. Circunferencia. Medida de superficies. 124

1. Circunferencia y círculo. Radio, cuerda y diámetro.
2. Posiciones de un punto y de una recta respecto de una circunferencia.
3. Longitud de la circunferencia. I.
4. Longitud de la circunferencia. II.
5. Figuras circulares.
6. Medir superficies mediante la cuadrícula.
7. Área de una figura plana.

Ejercicios y problemas.

Tema 22. Superficie. 132

1. Unidades de superficie.
2. Relaciones entre las unidades de superficie.
3. Cambio de unidad de superficie.
4. Unidades agrarias. Complejos e incomplejos de superficie.
5. Paso de incomplejo a complejo.
6. Paso de complejo a incomplejo.

Ejercicios y problemas.

Tema 23. Área de los paralelogramos y del triángulo. 140

1. Área del rectángulo.
2. Área de los paralelogramos.
3. Área del triángulo.

Ejercicios y problemas.

Tema 24. Simetrías. 144

1. Simetría respecto de un eje.
2. Propiedades de la simetría respecto de un eje.
3. Figuras con ejes de simetría.
4. Mediatriz de un segmento. Trazado.
5. Bisectriz de un ángulo. Trazado.
6. Ejes de simetría de algunas figuras planas. I.
7. Ejes de simetría de algunas figuras planas. II.

Ejercicios y problemas.

Tema 25. Poliedros. Prismas. Pirámides. Cuerpos redondos. 152

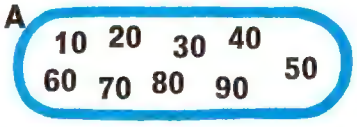
1. Poliedros. Desarrollo de un poliedro.
2. Poliedros regulares.
3. Prismas. Elementos. Desarrollo de un prisma.
4. Clases de prismas. Prisma regular.
5. Pirámides. Elementos. Desarrollo de una pirámide.
6. Clases de pirámides. Pirámide regular.
7. Cuerpos redondos.

Ejercicios y problemas.

1. Formación o definición de conjuntos.

CONJUNTO DEFINIDO POR EXTENSIÓN

$A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$



CONJUNTO DEFINIDO POR COMPRENSIÓN

$A = \{$números de dos cifras que acaban en cero$\}$

Formación o definición de conjuntos

Hay dos maneras de formar o definir un conjunto: por extensión y por comprensión.

- **Un conjunto se define por extensión cuando se enumeran todos sus elementos.**

  Ejemplo:

  $A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$

- **Un conjunto se define por comprensión cuando se cita alguna propiedad característica del conjunto,** es decir, una propiedad que tienen todos los elementos del conjunto y sólo ellos.

  Así, el conjunto **A** anterior se puede definir así:
  $A = \{$**números de dos cifras que acaban en cero**$\}$.

  La propiedad característica del conjunto **A** es «ser números de dos cifras que acaban en 0».

Conjuntos bien formados o bien definidos

El conjunto $D = \{$**días de la semana**$\}$ está bien formado o bien definido porque se sabe con seguridad cuáles son sus elementos.

En cambio, el siguiente conjunto
$M = \{$**niños de esta clase que serán médicos**$\}$
es un conjunto mal formado, porque no se puede saber ahora cuáles son sus elementos.

Un conjunto se define por extensión cuando se enumeran todos sus elementos.
Un conjunto se define por comprensión cuando se cita una propiedad característica del conjunto.
Un conjunto se dice que está bien definido cuando se sabe con seguridad cuáles son sus elementos.

1. Responde:

¿Cuál es la propiedad característica del conjunto $B = \{$**do, re, mi, fa, sol, la, si**$\}$?

Escríbelo por comprensión.

2. Contesta:

¿Está bien definido el conjunto siguiente?

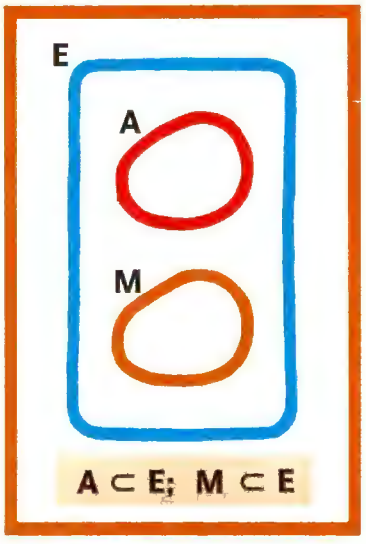
$A = \{$**alumnos que viven cerca del colegio**$\}$

3. Responde:

¿Cuál es la propiedad característica del conjunto $A = \{$**números de dos cifras que tienen las dos cifras iguales**$\}$.

Escribe el conjunto **A** por extensión.

2. Relación de inclusión.



Relación de inclusión

Cuando se forma o se define un conjunto, sus elementos se toman de otro conjunto más amplio llamado **conjunto referencial** o **conjunto universal.**

Tomemos como conjunto referencial el conjunto **E** = {**españoles**} y consideremos los conjuntos **A** = {**andaluces**} y **M** = {**madrileños**}.

Observa los diagramas de estos conjuntos.

Los elementos de **M** y de **A** son también elementos de **E;** por eso se dice que **M** y **A** son subconjuntos del conjunto **E.**

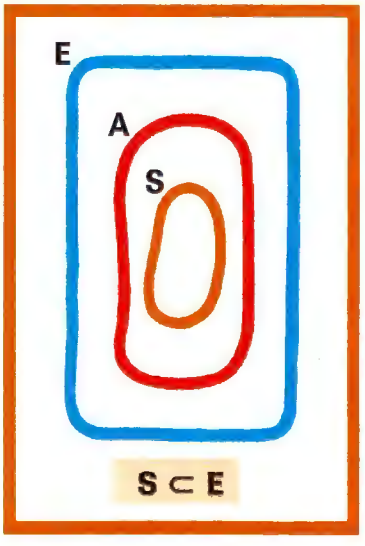
Se escribe	Se lee
M ⊂ **E**	**M** está incluido en **E** o **M** es subconjunto de **E.**
A ⊂ **E**	**A** está incluido en **E** o **A** es subconjunto de **E.**

Observa que **M** no es subconjunto de **A**; esto se expresa así:

M ⊄ **A** → **M** no está incluido en **A**

La relación expresada por el signo ⊂ se llama **relación de inclusión.**

Un conjunto es subconjunto de otro conjunto cuando todos los elementos del primero pertenecen al segundo.



Propiedad transitiva de la relación de inclusión

La relación de inclusión **A** ⊂ **E** se puede expresar diciendo: **todos los andaluces son españoles.**

Observa el diagrama de los tres conjuntos:

A = {**andaluces**}, **S** = {**sevillanos**}, **E** = {**españoles**} y las relaciones de inclusión siguientes:

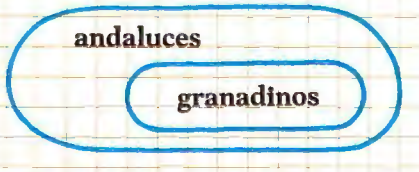
Si **S** ⊂ **A** y **A** ⊂ **E** entonces **S** ⊂ **E**

Si todos los sevillanos son andaluces y todos los andaluces son españoles, entonces todos los sevillanos son españoles.

Estas relaciones se conocen con el nombre de **propiedad transitiva de la relación de inclusión.**

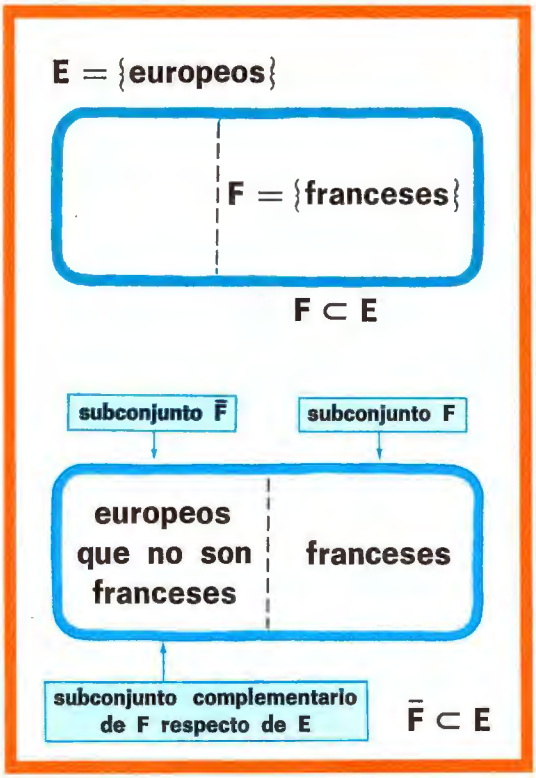
1. Expresa gráficamente que «todos los murcianos son españoles».

2. Expresa mediante una inclusión la relación de los conjuntos representados.



Completa: Todos los ... son ...

3. Conjunto complementario. Cambio de referencial.



Conjunto complementario

Considera el conjunto **E** de los europeos como conjunto referencial y el conjunto **F** de los franceses:

E = {europeos}; F = {franceses}

El conjunto **F** es subconjunto de **E**, porque «todos los franceses son europeos».

$$F \subset E$$

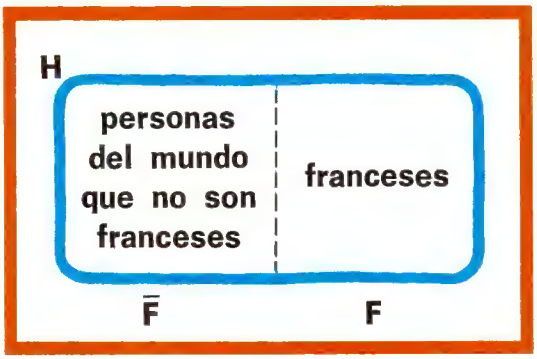
El conjunto formado por los europeos que no son franceses es un subconjunto de **E** que se llama **subconjunto complementario de F respecto de E.**

El subconjunto complementario de **F** se representa por $\bar{F}$:

$\bar{F}$ = {**europeos que no son franceses**}

$$\bar{F} \subset E$$

Si A es subconjunto de un conjunto referencial E, el subconjunto $\bar{A}$ complementario de A respecto de E está formado por los elementos de E que no pertenecen a A.



Cambio de referencial

¿Cuál sería el complementario del conjunto F = {franceses} si se toma como referencial el conjunto H = {personas del mundo}?

En este caso el complementario de **F** respecto de **H** serían las personas del mundo que no son franceses:

$\bar{F}$ = {**personas del mundo que no son franceses**}

Cuando cambia el conjunto referencial, cambia el conjunto complementario.

1. **Halla el complementario del conjunto G = {granadinos} si se toma como referencial el conjunto A = {andaluces}.**

2. **Halla el complementario del conjunto G = {granadinos} si se toma como referencial el conjunto E = {españoles}.**

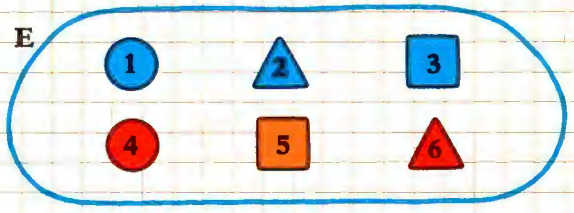
3. **Halla el complementario del conjunto A = {1, 3, 5, 7}:**

   a) Si se toma como referencial **E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.**

   b) Si se toma como referencial el conjunto **R = {1, 3, 5, 7, 9}.**

Ejercicios y problemas

1. El diagrama representa un conjunto **E** de botones. Cada uno lleva un número para poder designarlo.



Escribe los elementos de cada uno de los siguientes subconjuntos de **E**:

A = {**botones azules**} = {**1, 2, 3**}
T = {**botones triangulares**} = ...
R = {**botones rojos**} = ...
S = {**botones redondos**} = ...
C = {**botones cuadrados**} = ...
$\bar{A}$ = {**botones que no son azules**} = ...
$\bar{C}$ = {**botones que no son cuadrados**} = ...
$\bar{T}$ = {**botones que no son triangulares**} = ...

2. Escribe los tres subconjuntos unitarios (conjuntos de un solo elemento) de **E** = {**a, b, c**}.

Escribe después los tres subconjuntos de dos elementos.

¿Es {**a, b, c**} subconjunto de **E**?

Contando el ∅, que es subconjunto de cualquier conjunto, indica los subconjuntos de **E** = {**a, b, c**}.

3. ¿Cuál es la propiedad característica del conjunto **A** = {**marzo, mayo**}?

Escribe el conjunto **A** por comprensión.

4. Define el conjunto **A** = {**provincias andaluzas**} por extensión.

5. Sean los siguientes conjuntos:

A = {**astronautas**}
B = {**astronautas que han ido a la Luna**}
C = {**astronautas que han ido a Marte**}

¿Es **B** ⊂ **A**? ¿Por qué? ¿Cómo es el conjunto **C**? ¿Cuántos elementos tiene?

6. Escribe tres subconjuntos del conjunto **A** = {**1, 3, 5, 7, 9**} y represéntalos en diagramas.

7. Representa en diagramas que el conjunto de los malagueños está incluido en el conjunto de los andaluces, que, a su vez, está contenido en el conjunto de todos los españoles.

8. Recuerda que al cambiar el conjunto referencial, cambia el complementario.

Halla el complementario del subconjunto **B** al cambiar el referencial.

Referencial	Subconjunto B	Subconjunto complementario
{1, 3, 5, 7, 9}	{3, 5, 7}	
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	{3, 5, 7}	
{1, 3, 5, 7}	{3, 5, 7}	
{3, 5, 7}	{3, 5, 7}	∅

9. Considera los conjuntos:

A = {**letras de la palabra «palmero»**}
B = {**letras de la palabra «alero»**}
C = {**letras de la palabra «mero»**}

Haz los diagramas de Venn de estos conjuntos y escribe las relaciones de inclusión que hay entre ellos.

10. Sean los conjuntos:

A = {**niños nacidos en Ávila**}
B = {**niños rubios**}
C = {**niños que usan gafas**}

Expresa mediante el signo ⊂ que:

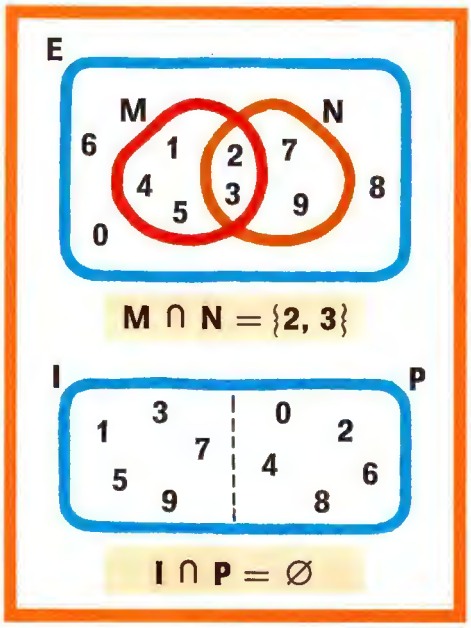
1.º Los niños nacidos en Ávila son rubios.
2.º Los niños rubios han nacido en Ávila.
3.º Los niños rubios usan gafas.
4.º Los niños que usan gafas han nacido en Ávila.

11. Halla el complementario $\bar{B}$ de **B** = {**5, 7**} respecto de **A** = {**1, 3, 5, 7, 9**}.

Halla después el complementario de $\bar{B}$.

¿Cómo son **B** y el complementario de $\bar{B}$?

1. Intersección de conjuntos. Casos particulares.



Intersección de conjuntos

Consideremos **E** como conjunto referencial:

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Consideremos los conjuntos **M** y **N**:

$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $N = \{2, 3, 7, 9\}$

El conjunto formado por los elementos comunes de **M** y **N** se llama **intersección** de los dos conjuntos:

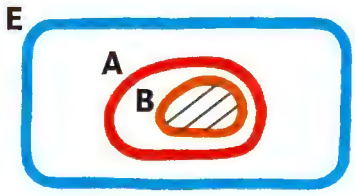
$$M \cap N = \{2, 3\}$$

Los conjuntos $I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ no tienen elementos comunes, es decir, son **conjuntos disjuntos** y su intersección es el **conjunto vacío.**

$$I \cap P = \varnothing$$

Se llama intersección de dos conjuntos al conjunto formado por los elementos que pertenecen a la vez a los dos conjuntos.

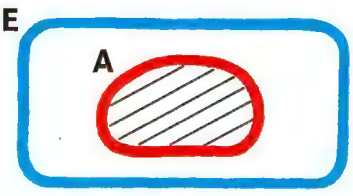
Casos particulares de la intersección de conjuntos



CASO 1

Intersección de un conjunto con un subconjunto suyo:

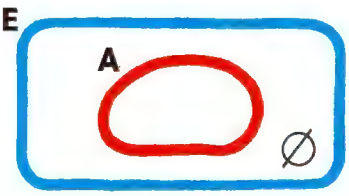
$A \cap B = B$



CASO 2

Intersección de un conjunto con él mismo:

$A \cap A = A$



CASO 3

Intersección de un conjunto con el conjunto vacío:

$A \cap \varnothing = \varnothing$

La intersección de un conjunto A con un subconjunto suyo B es el subconjunto B.

La intersección de un conjunto A con él mismo es el propio conjunto A.

La intersección de un conjunto con el conjunto vacío es el conjunto vacío.

1. Halla el conjunto intersección en cada caso:

$A = \{a, b, e, f, h, j, k\}$
$B = \{h, i, k, b, c, d, e\}$
$C = \{d, e, f, g, i, j, k\}$

- $A \cap B = \ldots$
- $B \cap C = \ldots$
- $A \cap C = \ldots$
- $A \cap A = \ldots$

2. Considera los conjuntos A y B:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $B = \{2, 4, 6\}$

Calcula:

a) $A \cap B$ b) $A \cap A$ c) $A \cap \varnothing$

2. Propiedades asociativa y conmutativa de la intersección de conjuntos.

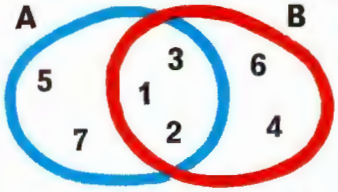
Propiedad asociativa de la intersección

Observa dos formas de realizar la intersección de los tres conjuntos **A**, **B** y **C**.

$A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ $C = \{1, 2, 4, 8\}$

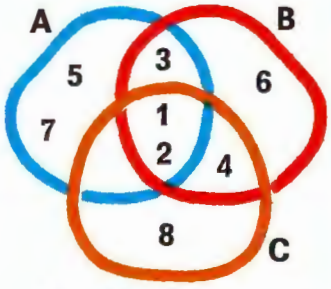
PRIMERA FORMA

1.° Se halla la intersección de **A** con **B**.



$A \cap B = \{1, 2, 3\}$

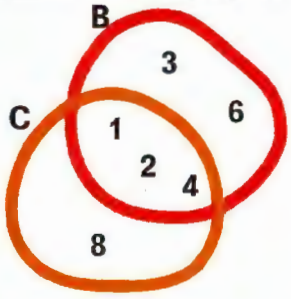
2.° Después se halla la intersección de $A \cap B$ con el conjunto **C**.



$(A \cap B) \cap C = \{1, 2\}$

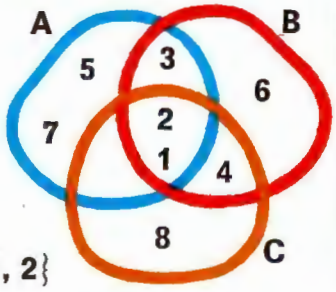
SEGUNDA FORMA

1.° Se halla la intersección de **B** con **C**.



$B \cap C = \{1, 2, 4\}$

2.° Después se halla la intersección del conjunto **A** con $B \cap C$.



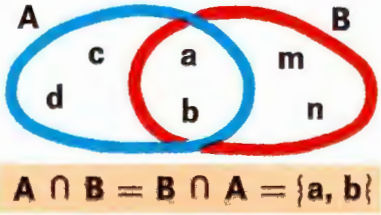
$A \cap (B \cap C) = \{1, 2\}$

En los dos casos se obtiene el mismo resultado:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Ésta es la **propiedad asociativa** de la intersección.

Para tres conjuntos A, B y C cualesquiera se verifica que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.



$A \cap B = B \cap A = \{a, b\}$

Propiedad conmutativa de la intersección

Fíjate en los conjuntos **A** y **B**:

$A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{a, b, m, n\}$

Como $A \cap B = \{a, b\}$ y $B \cap A = \{a, b\}$, resulta que $A \cap B = B \cap A$.

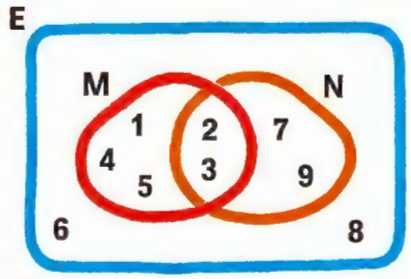
Ésta es la **propiedad conmutativa** de la intersección.

Para dos conjuntos A y B cualesquiera se verifica que $A \cap B = B \cap A$.

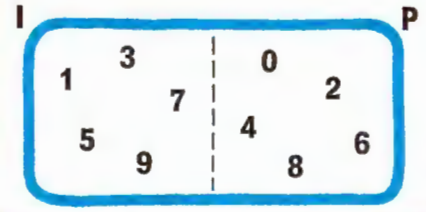
1. Comprueba la propiedad asociativa de la intersección con los conjuntos $A = \{m, n, p, q, r\}$, $B = \{c, d, l, p, q, m\}$, $C = \{h, t, r, n, p, q\}$.

• Comprueba la propiedad conmutativa de la intersección con los conjuntos **A** y **B**.

3. Unión de conjuntos. Casos particulares.



$M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$



$I \cup P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Unión de conjuntos

Consideremos el conjunto referencial **E** y los conjuntos $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $N = \{2, 3, 7, 9\}$.

Se llama **unión** de los dos conjuntos **M** y **N** al conjunto formado:

- por los elementos que pertenecen sólo a **M (1, 4, 5)**,
- por los que pertenecen sólo a **N (7, 9)**
- y por los que pertenecen a la vez a **M** y a **N (2, 3)**

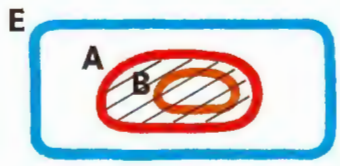
$$M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

Los conjuntos $I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ son disjuntos. En este caso la unión está formada por todos los elementos de **I** y por todos los elementos de **P**:

$$I \cup P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

En general, el conjunto unión de A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A, a B o a ambos.

Casos particulares de la unión de conjuntos



CASO 1

Unión de un conjunto con un subconjunto suyo:

$A \cup B = A$

CASO 2

Unión de un conjunto con él mismo:

$A \cup A = A$

CASO 3

Unión de un conjunto con el conjunto vacío:

$A \cup \varnothing = A$

La unión de un conjunto A con el subconjunto suyo B es el conjunto A.
La unión de un conjunto A con él mismo es el mismo conjunto A.
La unión de un conjunto A con el conjunto vacío es el conjunto A.

1. Halla el conjunto unión en cada caso:

$A = \{a, b, c, d, e\}$
$B = \{b, c, f, g, h\}$
$C = \{b, m, n\}$

- $A \cup B = \ldots$
- $B \cup C = \ldots$
- $A \cup C = \ldots$

2. Considera los conjuntos A y B:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $B = \{2, 4, 6\}$

Calcula:

a) $A \cup B$ b) $A \cup A$ c) $A \cup \varnothing$

4. Propiedades asociativa y conmutativa de la unión de conjuntos.

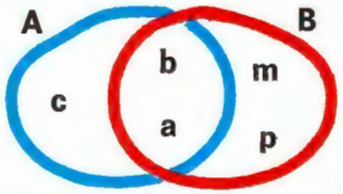
Propiedad asociativa de la unión

Observa dos formas de realizar la unión de los tres conjuntos **A, B** y **C.**

$A = \{a, b, c\}$ $B = \{a, b, m, p\}$ $C = \{a, p, q\}$

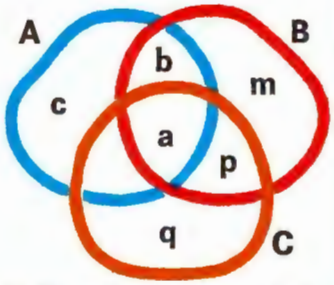
PRIMERA FORMA

1.° Se halla la unión de **A** con **B.**



$A \cup B = \{a, b, c, m, p\}$

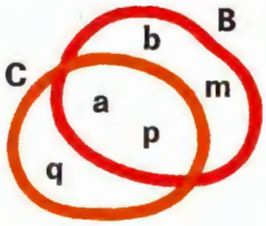
2.° Después se halla la unión de **A ∪ B** con el conjunto **C.**



$(A \cup B) \cup C = \{a, b, c, m, p, q\}$

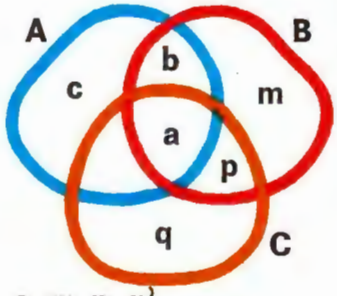
SEGUNDA FORMA

1.° Se halla la unión de **B** con **C.**



$B \cup C = \{a, b, m, p, q\}$

2.° Después se halla la unión del conjunto **A** con **B ∪ C.**



$A \cup (B \cup C) = \{a, b, c, m, p, q\}$

En los dos casos se obtiene el mismo resultado:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Esta es la **propiedad asociativa** de la unión.

Para tres conjuntos A, B y C cualesquiera se verifica que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

$A \cup B = B \cup A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

Propiedad conmutativa de la unión de conjuntos

Observa los conjuntos **A** y **B**:

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 5, 6\}$

Como $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ y $B \cup A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, resulta que $A \cup B = B \cup A$.

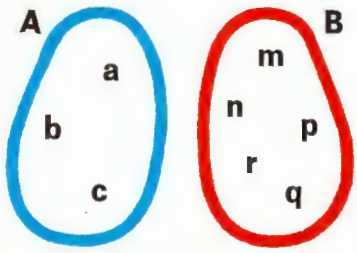
Ésta es la **propiedad conmutativa** de la unión.

Para dos conjuntos A y B cualesquiera se verifica que $A \cup B = B \cup A$.

1. Comprueba la propiedad asociativa de la unión con los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$, $C = \{1, 2, 3, 6, 8, 9\}$.

- Comprueba la propiedad conmutativa de la unión con los conjuntos **A** y **B.**

5. Cardinal del conjunto unión.



$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$

PRIMER CASO

Cuando los conjuntos son disjuntos.

Observa los diagramas de Venn de los conjuntos **A** y **B**.

$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{m, n, p, q, r\}$

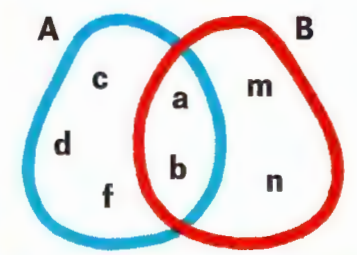
- El número de elementos de **A** es 3 → $\text{Card}(A) = 3$.
- El número de elementos de **B** es 5 → $\text{Card}(B) = 5$.

El conjunto unión tiene 8 elementos.

$A \cup B = \{a, b, c, m, n, p, q, r\} \rightarrow \text{Card}(A \cup B) = 8$.

Se observa que: $\underbrace{\text{Card}(A \cup B)}_{8} = \underbrace{\text{Card}(A)}_{3} + \underbrace{\text{Card}(B)}_{5}$

El cardinal de la unión de dos conjuntos disjuntos es igual a la suma de los cardinales de dichos conjuntos.



$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$

SEGUNDO CASO

Cuando los conjuntos no son disjuntos.

Observa ahora los diagramas de Venn de los conjuntos no disjuntos **A** y **B**.

$A = \{a, b, c, d, f\} \qquad B = \{a, b, m, n\}$

Observa que $A \cap B = \{a, b\}$ y que:

- El número de elementos de **A** es 5 → $\text{Card}(A) = 5$.
- El número de elementos de **B** es 4 → $\text{Card}(B) = 4$.

El número de elementos de $A \cap B$ es 2 → $\text{Card}(A \cap B) = 2$.

El conjunto unión tiene 7 elementos:

$A \cup B = \{a, b, c, d, f, m, n\} \rightarrow \text{Card}(A \cup B) = 7$.

En este caso, $\text{Card}(A \cup B) \neq \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

La relación entre los cardinales es la siguiente:

$\underbrace{\text{Card}(A \cup B)}_{7} = \underbrace{\text{Card}(A)}_{5} + \underbrace{\text{Card}(B)}_{4} - \underbrace{\text{Card}(A \cap B)}_{2}$

El cardinal de la unión de dos conjuntos no disjuntos es igual a la suma de los cardinales de los dos conjuntos menos el cardinal de su intersección.

1. Sean A y B dos conjuntos disjuntos con Card (A) = 5 y Card (B) = 7.
Calcula Card (A∪B) y Card (A∩B).

2. Representa en diagramas de Venn los siguientes conjuntos:
A = {a, e, i, o, u}, B = {p, q, r, s, a, e}
Calcula: a) Card (A∩B); b) Card (A∪B).

Ejercicios y problemas

1. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, calcula:

a) $A \cup A$ b) $A \cap A$ c) $A \cup \varnothing$ d) $A \cap \varnothing$

2. Sea $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ el conjunto referencial y $A = \{0, 1, 2, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 8\}$ y $C = \{1, 2, 3, 7, 9\}$.

Halla:

a) $\overline{A}$ b) $\overline{B}$ c) $\overline{C}$ d) $A \cup B$ e) $A \cap B$ f) $(A \cup B) \cup C$ g) $(A \cap B) \cap C$

3. Si $A = \{$**números mayores que 2 y menores que 7**$\}$, $B = \{$**números menores que 10**$\}$ y $C = \{$**números mayores que 4 y menores que 12**$\}$, expresa por extensión $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$.

4. Dado el conjunto $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, escribe un conjunto B tal que $A \cap B = \{1, 3, 5\}$.

Encuentra dos soluciones.

5. En una clase se consideran los conjuntos **A** y **B** siguientes:

A = {**alumnos que llevan zapatos**}, **B** = {**alumnos que llevan botas**}.

¿Qué puedes decir de los conjuntos **A** y **B**?

6. Sean **H** = {**habitantes del mundo**}, **E** = {**europeos**} y **A** = {**artistas de cine**}.

Representa estos conjuntos. Indica con un punto el lugar donde estaría el artista mexicano Cantinflas.

7. De 100 alumnos de un colegio, 60 leen el periódico **A**, 45 leen el periódico **B** y 10 alumnos no leen ninguno de los dos periódicos.

¿Cuántos alumnos leen los dos periódicos **A** y **B**?

Llama **A** = {**alumnos del colegio que leen el periódico A**}.

B = {**alumnos del colegio que leen el periódico B**}.

Card $(A \cup B) = 100 - 10 = 90$.

Aplica después la fórmula $\underbrace{\text{Card}\,(A \cup B)}_{90} = \underbrace{\text{Card}\,(A)}_{60} + \underbrace{\text{Card}\,(B)}_{45} - \underbrace{\text{Card}\,(A \cap B)}$

Representa los conjuntos **A** y **B**.

8. Luis reúne postales en color y postales de catedrales, y en total tiene 52 postales. Tiene 42 postales en color y 34 postales de catedrales.

¿Cómo es esto posible?

Acláralo utilizando diagramas de Venn.

9. Representa en tu cuaderno los conjuntos siguientes:

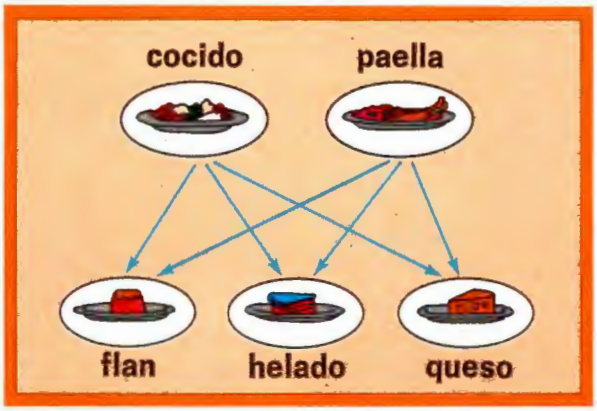
E = {**españoles**}, **P** = {**pintores**}, **V** = {**pintores que viven en la actualidad**}.

Indica con un 1 el lugar que corresponde a Goya, con un 2 el lugar que te corresponde a ti y con un 3 el lugar que corresponde a un pintor que vive actualmente.

10. **A** es un conjunto de números $A = \{2, 3, 4\}$.

Halla dos conjuntos **B** y **C** de números tales que $B \cap C = A$.

1. Producto cartesiano.



En un restaurante hay para elegir dos platos principales (cocido y paella) y tres postres (flan, helado y queso).

¿De cuántas formas se puede elegir la comida formada por un plato principal y un postre?

Observa las flechas. Cada flecha une un plato principal con un postre. Hay tantas combinaciones como flechas.

Se pueden elegir seis combinaciones de un plato y un postre.

flan	(cocido, flan)	(paella, flan)
helado	(cocido, helado)	(paella, helado)
queso	(cocido, queso)	(paella, queso)
	cocido	paella

Las formas de elegir la comida se pueden expresar también en una tabla.

En la tabla se han formado seis pares. Cada par indica una comida posible.

Así, el par (cocido, flan) indica que se elige el cocido y el flan.

f	(c, f)	(p, f)
h	(c, h)	(p, h)
q	(c, q)	(p, q)
	c	p

$A = \{p, c\}$

$B = \{f, h, q\}$

Producto cartesiano: A × B

La tabla anterior se puede simplificar si se escribe sólo la letra inicial de cada palabra.

Si llamamos **A** al conjunto $A = \{c, p\}$ y **B** al conjunto $\{f, h, q\}$, el conjunto de todos los pares posibles se llama **producto cartesiano** de **A** por **B** y se escribe:

$$A \times B = \{(c, f),\ (c, h),\ (c, q),\ (p, f),\ (p, h),\ (p, q)\}$$

Se llama producto cartesiano de dos conjuntos A y B y se escribe A×B, al conjunto de todos los pares ordenados posibles, de modo que el primer elemento pertenezca a A y el segundo a B.

1. Lee y completa:

Carlos quiere comprar una bicicleta. En la tienda las hay de tres colores: rojas, azules y verdes, y de dos tamaños: grandes y pequeñas.

Completa el diagrama de flechas y la tabla para indicar todas las posibilidades que tiene Carlos al elegir la bicicleta.

roja	(grande, roja)	(pequeña, roja)
azul	(grande, azul)	
verde		
	grande	pequeña

2. Representación del producto cartesiano.

DIAGRAMA CARTESIANO

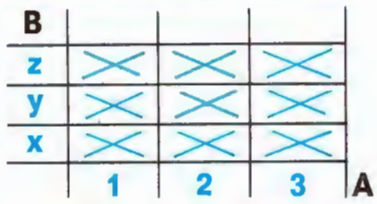


DIAGRAMA DE FLECHAS

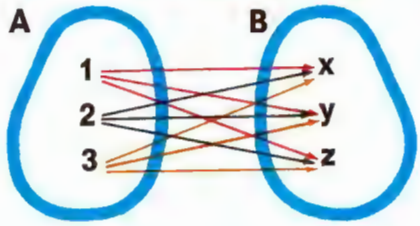
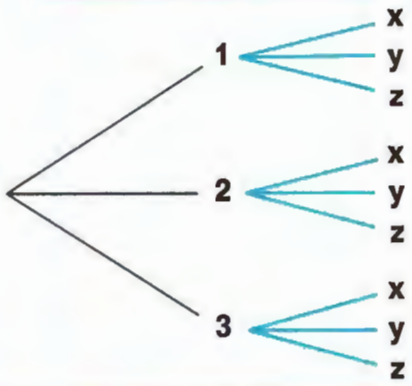


DIAGRAMA EN ÁRBOL



Hagamos el producto cartesiano **A** × **B** de los conjuntos **A** y **B**:

$$A = \{1, 2, 3\} \qquad B = \{x, y, z\}$$

Este conjunto estará formado por 9 pares ordenados, ya que cada conjunto tiene tres elementos: $(3 \times 3) = 9$.

$$A \times B = \left\{ \begin{matrix} (1, x), & (1, y), & (1, z), \\ (2, x), & (2, y), & (2, z), \\ (3, x), & (3, y), & (3, z) \end{matrix} \right\}$$

El producto cartesiano **A** × **B** se representa habitualmente de tres formas.

- En el **diagrama cartesiano** cada par ordenado viene representado por una cuadrícula.
- En el **diagrama de flechas** cada par ordenado viene representado por una flecha.
- En el **diagrama en árbol** cada par ordenado viene representado por un trazo azul.

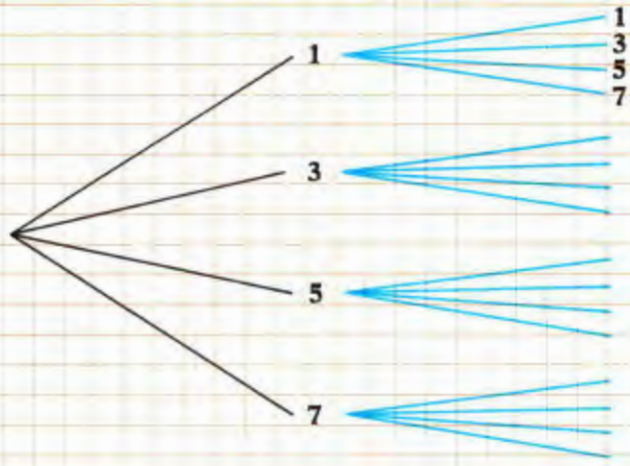
El producto cartesiano de dos conjuntos se representa en diagramas cartesianos, en diagramas de flechas y en diagramas en árbol.

1. Lee:

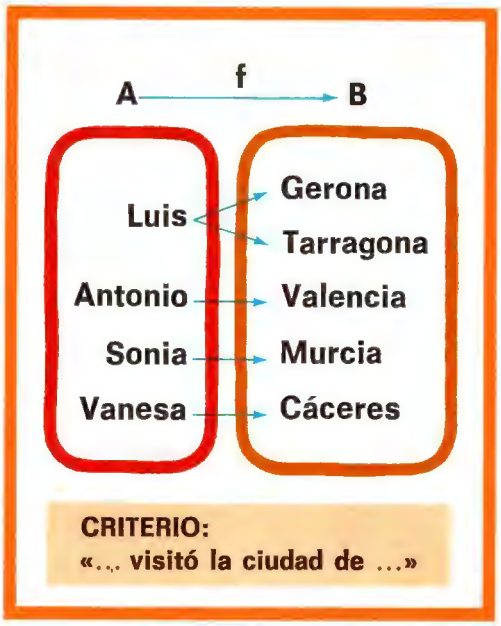
Con las cifras **A** = {1, 3, 5, 7} se quiere escribir todos los números de dos cifras posibles.

Para ello hay que formar todos los pares posibles de **A** × **A**.

Completa el diagrama en árbol de **A** × **A**.



3. Correspondencia entre dos conjuntos.



Observa este diagrama de flechas.

A es un conjunto de niños y **B** es un conjunto de ciudades.

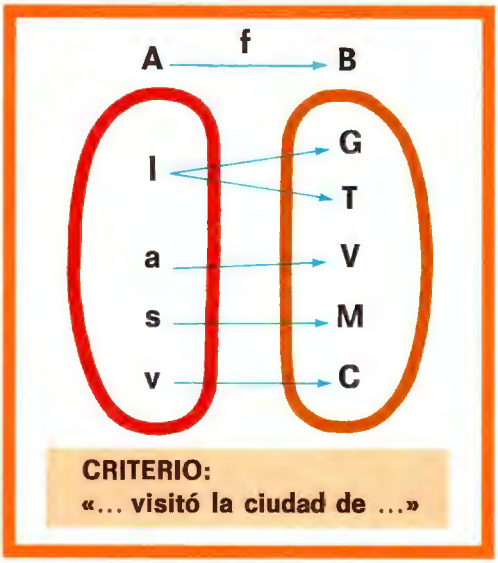
A = {**Luis, Antonio, Sonia, Vanesa**}
B = {**Gerona, Tarragona, Valencia, Murcia, Cáceres**}

Las flechas del diagrama indican las ciudades que cada niño ha visitado en las vacaciones pasadas.

Así, Luis visitó dos ciudades, Gerona y Tarragona, mientras que los demás niños visitaron una sola ciudad.

Entre los conjuntos **A** y **B** se ha establecido una correspondencia **f** de conjunto inicial **A** y de conjunto final **B.**

El criterio es: «... visitó la ciudad de...».



Este diagrama es también el **diagrama de flechas** de esta correspondencia **f,** en donde, para simplificar, se representa cada nombre de niño por su letra inicial en minúscula, y cada nombre de ciudad por su letra inicial en mayúscula.

Cada flecha indica un par. Por eso la correspondencia entre los conjuntos **A** y **B** está formada por el siguiente conjunto de pares:

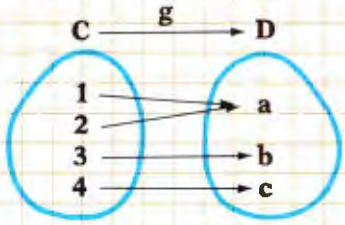
G = {**(l, G), (l, T), (a, V), (s, M), (v, C)**}

En estos pares el primer elemento pertenece al conjunto inicial **A** y el segundo al conjunto final **B.**

Se observa que el conjunto **G** de pares es un subconjunto de **A**×**B** que tendrá 4×5 = 20 pares.

Una correspondencia entre dos conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano A × B.

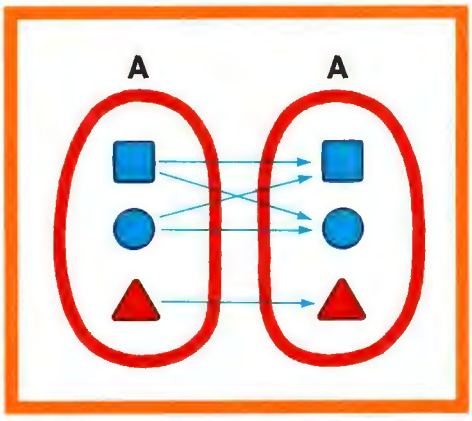
1. Observa el diagrama de flechas y el diagrama cartesiano de la correspondencia g entre C y D.



c				x
b			x	
a	x	x		
	1	2	3	4

Escribe los pares de esta correspondencia.

4. Relación en un conjunto.

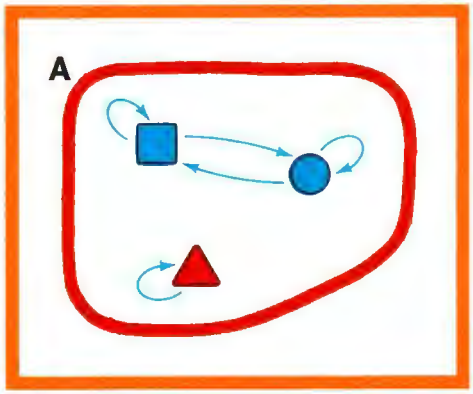


Observa el diagrama de flechas de una correspondencia entre un conjunto **A** y él mismo.

El conjunto inicial y el conjunto final son el mismo conjunto **A.**

El criterio de esta correspondencia es «... tiene el mismo color que ...».

Una correspondencia como ésta de un conjunto **A** en sí mismo se llama **relación en el conjunto A.**



En este caso el diagrama de flechas se puede hacer representando una sola vez el conjunto **A.**

Pero en este diagrama de la relación debe haber tantas flechas como en el anterior.

La flecha ahora queda reducida a un lazo

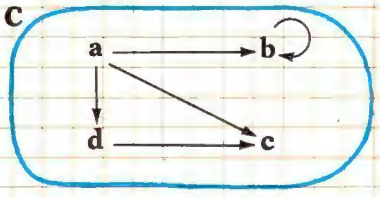
Los pares de esta relación son:

{(,) (,) (,) (,) (,)}

Una relación en un conjunto A es una correspondencia del conjunto A en sí mismo.

O también: Una relación en un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano A × A.

1. Observa el diagrama de flechas y el diagrama cartesiano de una relación en el conjunto C = {a, b, c, d}.



C

d	x				
c	x			x	
b	x	x			
a					
	a	b	c	d	C

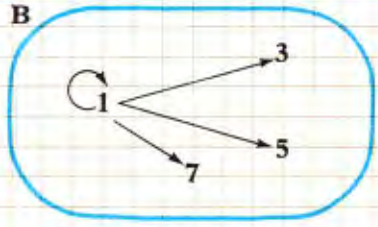
Escribe los pares de esta relación.

2. Observa los siguientes pares de una relación en el conjunto B = {1, 3, 5, 7}:

{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (3, 5), (3, 7), (5, 5), (5, 7), (7, 7)}

Cada par se refleja en el diagrama mediante una flecha.

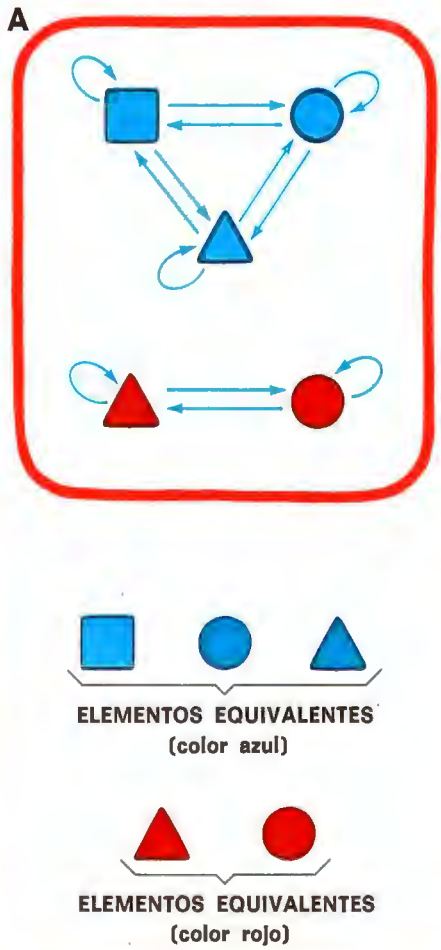
- Traza las flechas que faltan:



- Haz el diagrama cartesiano de la relación.

5. Relación de equivalencia.

Diagrama de flechas de la relación de equivalencia «... tiene el mismo color que...».



Observa el diagrama de flechas de la relación «... tiene el mismo color que...» en el conjunto **A.**

Cada flecha (→) significa «... tiene el mismo color que...».

Todo elemento tiene una flecha que sale de él y vuelve a él (lazo). Esto significa que todo elemento tiene el mismo color que él mismo.

Se observa también que no hay ningún par de elementos que estén unidos por una sola flecha.

La relación «... tiene el mismo color que...» definida en el conjunto **A** es una **relación de equivalencia.**

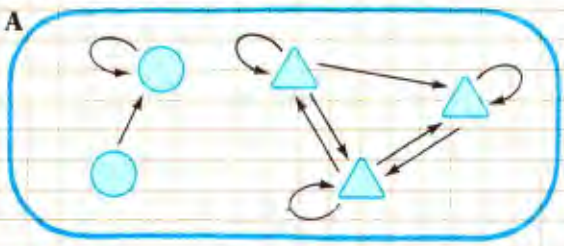
Los elementos unidos por flechas se llaman **elementos relacionados** o también **elementos equivalentes.**

En este caso los elementos equivalentes son los que tienen el mismo color.

1. Traza las flechas que faltan:

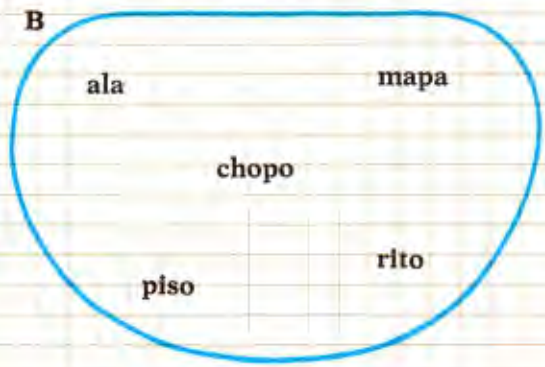
En el conjunto **A** se considera la relación «... tiene la misma forma que...». Cada flecha (→) significa «... tiene la misma forma que...».

Completa las flechas que faltan en el diagrama.



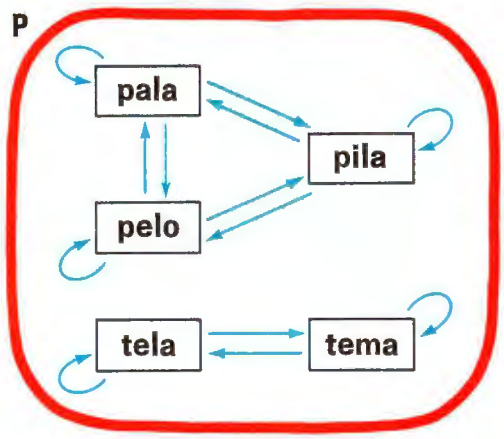
2. Dibuja el conjunto B en tu cuaderno:

Traza las flechas de la relación «... termina en la misma letra que...».

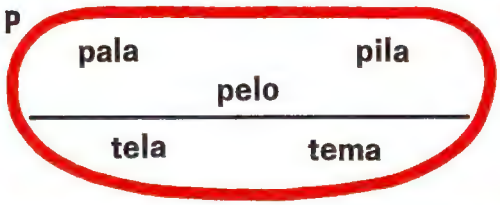


6. Clasificaciones.

Diagrama de flechas de la relación de equivalencia «...empieza con la misma letra que...» en el conjunto P.



Conjunto P clasificado en dos clases o subconjuntos.



Sea el conjunto **P** de palabras:

P = {pala, pila, pelo, tela, tema}

En este conjunto se considera la relación «... empieza con la misma letra que...».

Observa en el diagrama de flechas de esta relación que hay, por una parte, tres elementos relacionados entre sí (elementos equivalentes):

pala, pelo, pila

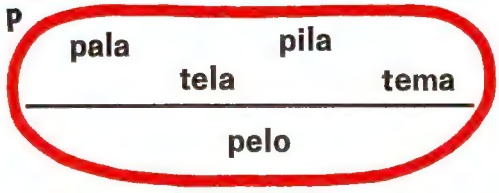
y por otra dos elementos relacionados entre sí:

tela, tema

Si se agrupan los elementos relacionados resultan dos subconjuntos.

Cada subconjunto es una clase de equivalencia.

Conjunto P clasificado por la relación «... acaba con la misma letra que...».



Si en el mismo conjunto **P** se considera la relación «... acaba con la misma letra que...», el conjunto queda clasificado según se indica en el diagrama.

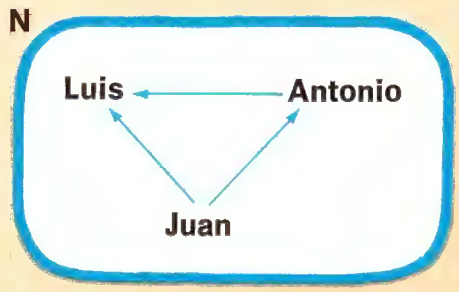
Una relación de equivalencia en un conjunto determina en éste una clasificación o partición.

1. Observa estos conjuntos:

- Clasifica el conjunto de palabras **L = {letra, mar, mula, pila, flor}** según el criterio o relación «... tiene el mismo número de vocales que...».
- Clasifica el conjunto de palabras **H = {misa, mapa, listo, sol, mar, lote}** según la relación «... tiene el mismo número de sílabas que...».

7. Relación de orden estricto.

Diagrama de flechas de la relación «... es más alto que...» en el conjunto N.



Observa las estaturas de Luis, Antonio y Juan.

El conjunto **N** = {**Luis, Antonio, Juan**} se puede ordenar por la relación «... es más alto que...».

Según este criterio, los elementos del conjunto **N** quedan ordenados así:

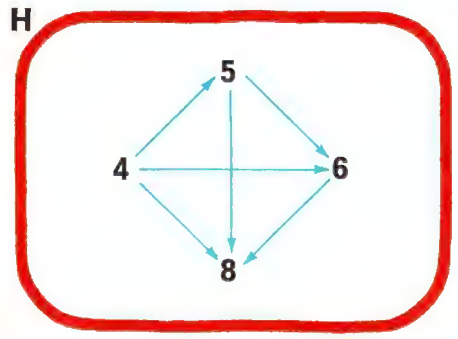
1.°	2.°	3.°
Juan	**Antonio**	**Luis**

Observa el diagrama de flechas, en el que cada flecha (→) significa «... es más alto que...».

Observa que del niño más alto (Juan) salen dos flechas, y que al niño más bajo (Luis) llegan dos flechas y que de él no sale ninguna.

La relación «... es más alto que...» es una relación de **orden estricto** en el conjunto **N.**

Diagrama de flechas de la relación «...es menor que ...» en el conjunto H.



Observa ahora el diagrama de flechas de la relación «...es menor que...» en el conjunto

H = {**6, 4, 5, 8**}

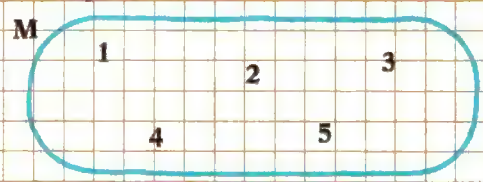
Cada flecha (→) indica «... es menor que...».

Esta relación se puede expresar también con el signo <

4 < 5; 5 < 6; 6 < 8; 4 < 6; 4 < 8; 5 < 8

La relación «... es menor que...» es también una relación de orden estricto en el conjunto **H.**

1. Observa el conjunto M.



Copia en tu cuaderno y traza las flechas de la relación «... es mayor que...» en el conjunto **M** = {**1, 2, 3, 4, 5**}.

Ejercicios y problemas

1. Sean los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$.

Halla $A \times B$ y $B \times A$.

¿Son iguales estos conjuntos?

2. En un bar sirven bocadillos de jamón, de queso y de chorizo y refrescos de naranja, limón y piña.

¿De cuántas formas diferentes se puede merendar tomando un solo bocadillo y un solo refresco? Escríbelas.

3. Sea **M** un conjunto de médicos $M = \{$**Juan, José, Luis**$\}$ y **E** un conjunto de enfermeras $E = \{$**Teresa, Carmen, María**$\}$.

¿Qué parejas de médico y enfermera se pueden formar?

4. Laura tiene 3 faldas: blanca, azul y gris, y 4 blusas: blanca, roja, verde y amarilla.

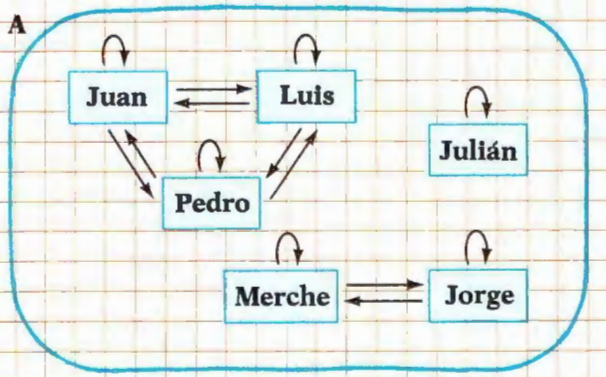
¿De cuántas formas distintas se puede vestir Laura utilizando las faldas y las blusas?

5. Un señor tiene 3 nietos: Antonio, Juan y Luis; y 3 nietas: Marta, Carmen y Regina.

Expresa mediante un gráfico las distintas parejas (nieto-nieta) que se pueden formar.

6. En un conjunto **A** de seis amigos se establece la relación «... tiene la misma edad que...».

Observa el diagrama de flechas y contesta.

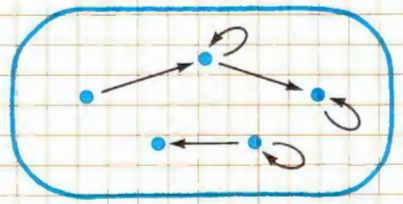


Si Luis tiene 8 años, ¿cuántos años tiene Pedro? ¿Y Juan? ¿Qué puedes decir de la edad de Merche y de Jorge?

En el conjunto de amigos hay uno que tiene una edad diferente a los demás. ¿Cuál es?

7. Varios amigos estaban trazando el diagrama de la relación «... tiene el mismo nombre que...», pero lo dejaron incompleto.

Dibuja en tu cuaderno el diagrama y completa las flechas que con seguridad faltan.

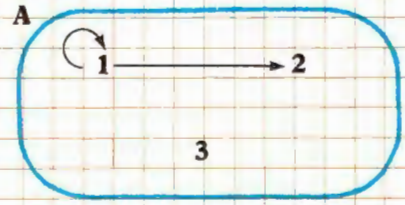


8. Dibuja en tu cuaderno el diagrama de flechas de la relación de orden estricto «... es mayor que...» en el conjunto $M = \{7, 9, 6, 4, 10\}$.

9. En el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ se considera la relación dada por el siguiente conjunto de pares:

$\{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$.

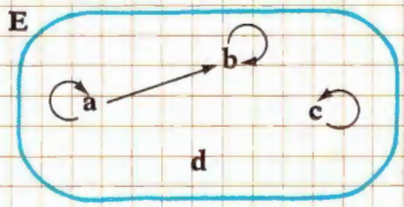
Completa el diagrama de flechas de esta relación:



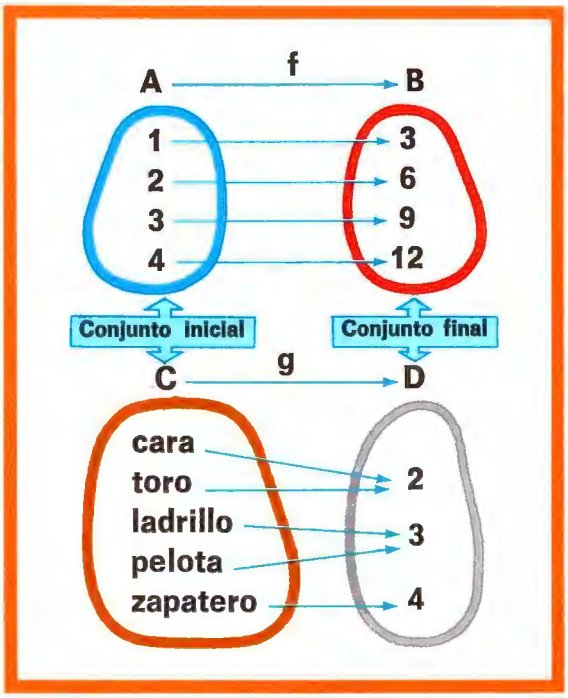
10. En el conjunto $E = \{a, b, c, d\}$ traza el diagrama de flechas de la relación cuyos pares son:

$\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (a, c)\}$

Completa el diagrama de flechas de esta relación:



1. Aplicación biyectiva o biyección.

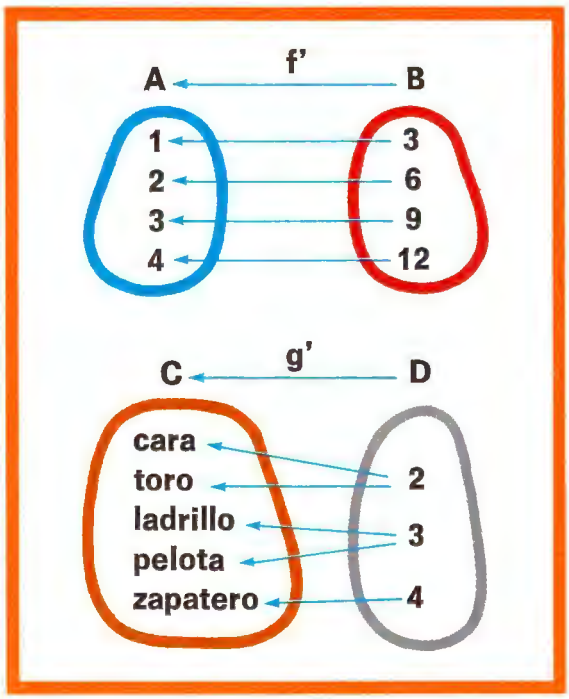


Observa los diagramas de flechas de las correspondencias **f** y **g**.

- El criterio de la correspondencia **f** es: «A cada número se asocia su triple».
- El criterio de la correspondencia **g** es: «A cada palabra se asocia el número de sílabas que tiene».

Las dos correspondencias son aplicaciones porque de cada elemento del conjunto inicial sale una sola flecha.

Una aplicación es una correspondencia tal que de cada elemento del conjunto inicial sale una sola flecha.



Observa las correspondencias inversas **f'** y **g'** de **f** y **g**.

La correspondencia **f'** es aplicación porque de cada elemento de **B** sale una sola flecha; pero **g'** no es aplicación porque de los elementos **2** y **3** del conjunto **D** salen dos flechas. Por eso se dice que **f** es una aplicación biyectiva; en cambio, **g** no es una aplicación biyectiva.

Entre dos conjuntos **A** y **B** hay una biyección:

1.° **Cuando de cada elemento de A sale una sola flecha.**

2.° **Cuando a cada elemento de B llega una sola flecha.**

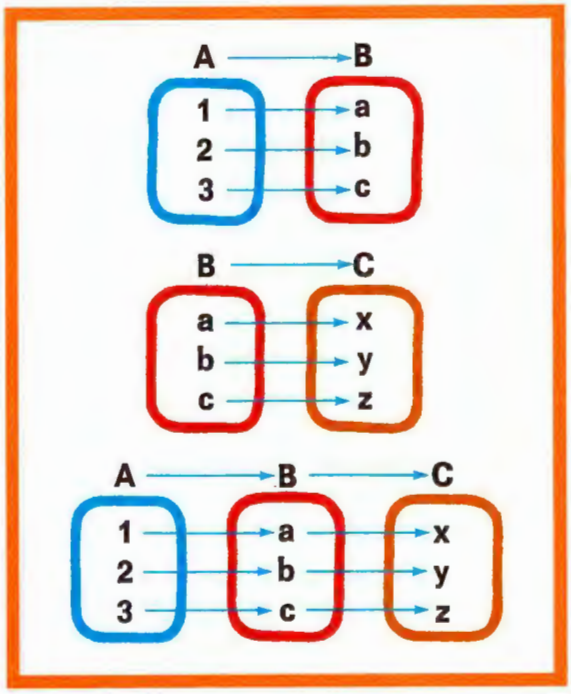
Una aplicación biyectiva o biyección es una aplicación tal que su correspondencia inversa es también aplicación.

1. Sean los conjuntos $P = \{\text{mesa, coche, tinte, pala}\}$ y $C = \{c, m, p, t\}$.

Representa la correspondencia **h** entre **P** y **C** dada por «... tiene por primera letra...».

Representa también la correspondencia inversa de **h** y di si **h** es una aplicación biyectiva.

2. Conjuntos coordinables. Propiedad común.



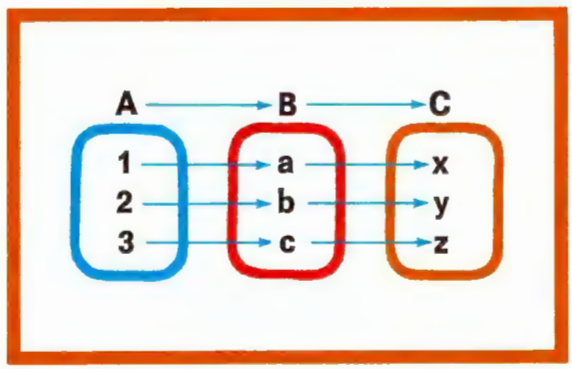
Conjuntos coordinables

Entre los conjuntos **A** y **B** se ha establecido una aplicación biyectiva. Por eso, los conjuntos **A** y **B** se dice que son **coordinables** o **biyectivos.**

También son coordinables los conjuntos **B** y **C,** porque entre ellos existe una aplicación biyectiva.

Observa que si **A** y **B** son coordinables y **B** y **C** también son coordinables, entonces **A** y **C** son coordinables.

Dos conjuntos son coordinables o biyectivos cuando entre ellos se puede establecer una aplicación biyectiva.



Propiedad común de los conjuntos coordinables

Los tres conjuntos **A, B** y **C** son coordinables. Observa que los conjuntos coordinables tienen en común el **cardinal,** es decir, tienen el **mismo número de elementos.** La propiedad o característica común de los conjuntos **A, B, C** y la de todos los que son coordinables con ellos es que su número de elementos o número natural es 3.

La propiedad común a los conjuntos que son coordinables es el número de elementos o número natural.

1. Lee con atención y contesta.

Puedes saber el número de elementos de un conjunto averiguando los elementos que tiene otro conjunto coordinable con él.

- En una orquesta hay 8 músicos. ¿Cuántos instrumentos hay si cada músico toca un instrumento?
- Un avión tiene 120 asientos para pasajeros. ¿Cuántos pasajeros lleva el avión si va completo?

2. ¿Son coordinables dos conjuntos que tengan distinto número de elementos?

3. ¿Es cierto que todo conjunto es coordinable con él mismo?

Traza las flechas de una aplicación biyectiva entre el conjunto **A** = {**1, 2, 3**} y él mismo.

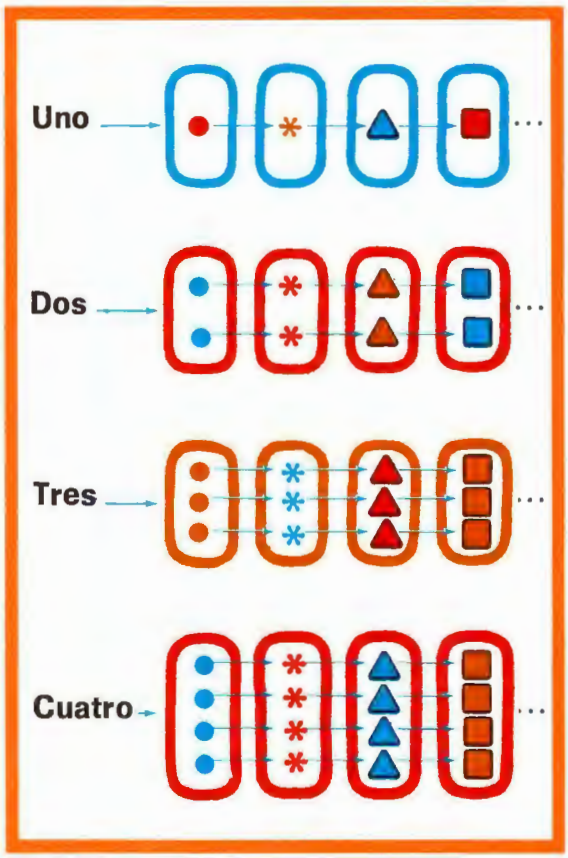
3. La sucesión de números naturales.

Número natural

Observa estos conjuntos.

- Los conjuntos **A, B** y **C** tienen en común que sus elementos son aves.
- Los conjuntos **D, E** y **F** tienen en común la forma de sus elementos.
- Los conjuntos **M, N** y **P** son coordinables y tienen en común el número de sus elementos o número natural.

Número natural es la propiedad común de los conjuntos coordinables entre sí.



La sucesión de los números naturales

Contar los elementos de un conjunto significa hallar su número natural.

- El conjunto **vacío** ∅ no tiene ningún elemento; se dice que tiene **cero** elementos.
- El **uno** es el número de elementos o propiedad común del conjunto {●} y de todos los que son coordinables con él.
- El **dos** es el número de elementos o propiedad común del conjunto {●, ●} y de todos los que son coordinables con él.
- El **tres** es el número de elementos o propiedad común del conjunto {●, ●, ●} y de todos los que son coordinables con él.

Esta sucesión de conjuntos ∅, {●}, {●, ●}, {●, ●, ●} y de números cero, uno, dos, tres ... no termina nunca. En efecto, por grande que sea el número de elementos de un conjunto, siempre se le puede agregar un nuevo elemento.

La sucesión de los números naturales cero, uno, dos, tres ... no acaba nunca. Todo número natural tiene un siguiente.

El conjunto de los números naturales {0, 1, 2, 3, ...} se designa por la letra ℕ.

Ejercicios y problemas

1. Observa los diagramas de dos aplicaciones entre los conjuntos **A** y **B**:

$A = \{a, b\}$
$B = \{1, 2\}$

Haz el diagrama de otras dos aplicaciones distintas entre **A** y **B**.

2. Entre el conjunto de alumnos de la clase y el conjunto de nombres se establece la correspondencia que asocia a cada niño su nombre.

¿Es esta correspondencia una aplicación? ¿Es una biyección?

3. Observa los diagramas de flechas y cartesianos de la correspondencia **f** entre **A** y **B**:

$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{a, b, c\}$

Escribe los pares de esta correspondencia (cada flecha un par).

¿Qué clase de correspondencia es **f**?

4. Se asocia a cada país su capital. ¿Qué clase de correspondencia resulta?

5. En una reunión de 15 jóvenes de 18 a 23 años se asocia a cada persona el número que expresa su edad en años.

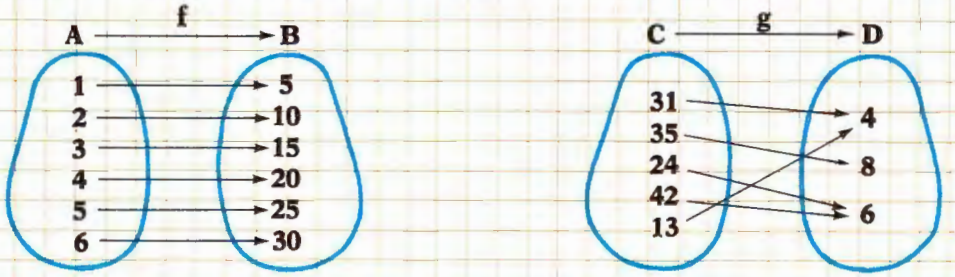
¿Es aplicación esta correspondencia? ¿Es una aplicación biyectiva?

6. Escribe un conjunto que sea coordinable con **M** = {**do, re, mi, fa, sol, la, si**}.

¿Cuántos conjuntos hay coordinables con **M**?

¿Qué propiedad común tienen todos esos conjuntos?

7. Escribe los pares de las correspondencias **f** y **g**.



Haz el gráfico de las correspondencias **f'** y **g'**, inversas de **f** y **g**, respectivamente.

¿Qué clase de correspondencia son **f** y **g**?

8. Haz el diagrama de flechas y el diagrama cartesiano de la correspondencia $M \xrightarrow{h} N$:
M = {**a, b, c, d, f**}, **N** = {**3, 5, 7, 8, 9**} si los pares de la correspondencia son {**(a, 3), (b, 5), (c, 7), (d, 8), (f, 9)**}.

¿Es **h** una aplicación? ¿Es una aplicación biyectiva?

1. Sistema de numeración decimal.

CIFRAS O GUARISMOS

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

El sistema de numeración decimal procede de la India y fue introducido en Europa por los árabes hace unos mil años.

Se llama **decimal** o de base diez porque se utilizan **diez** símbolos para representar todos los números.

Los diez símbolos, cifras o guarismos son:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

1 decena = 10 unidades

1 centena = 10 decenas

1 millar = 10 centenas

1 dec. de mil = 10 millares

1 cent. de mil = 10 dec. de mil

1 millón = 10 cent. de mil

La relación decimal que hay entre las diversas unidades es:

- 10 unidades de primer orden = 1 decena (unidad de segundo orden).
- 10 decenas = 1 centena (unidad de tercer orden).
- 10 centenas = 1 millar o mil (unidad de cuarto orden).
- 10 millares = 1 decena de mil (unidad de quinto orden).
- 10 decenas de mil = 1 centena de mil (unidad de sexto orden).
- 10 centenas de mil = 1 millón (unidad de séptimo orden).

Estas relaciones se resumen en el siguiente principio fundamental.

Cada diez unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediato superior.

1. Contesta:

- ¿Cuántas unidades de segundo orden tiene 1 unidad de tercer orden?
- ¿Cuántas unidades de tercer orden tiene 1 unidad de cuarto orden?
- ¿Cuántas unidades de cuarto orden tiene 1 unidad de quinto orden?
- 10 unidades de quinto orden, ¿qué unidad forman?

2. Contesta:

- ¿Cuántas centenas de mil tiene 1 millón?
- ¿Cuántos millares tienen 3 decenas de millar?
- ¿Cuántas centenas de millar tienen 2 millones?
- ¿Quiénes fueron los que introdujeron en Europa el sistema de numeración decimal?

3. Escribe el número anterior y el número posterior de:

99.999 — 10.000 — 100.000 — 499.999 — 999.999 — 1.000.000

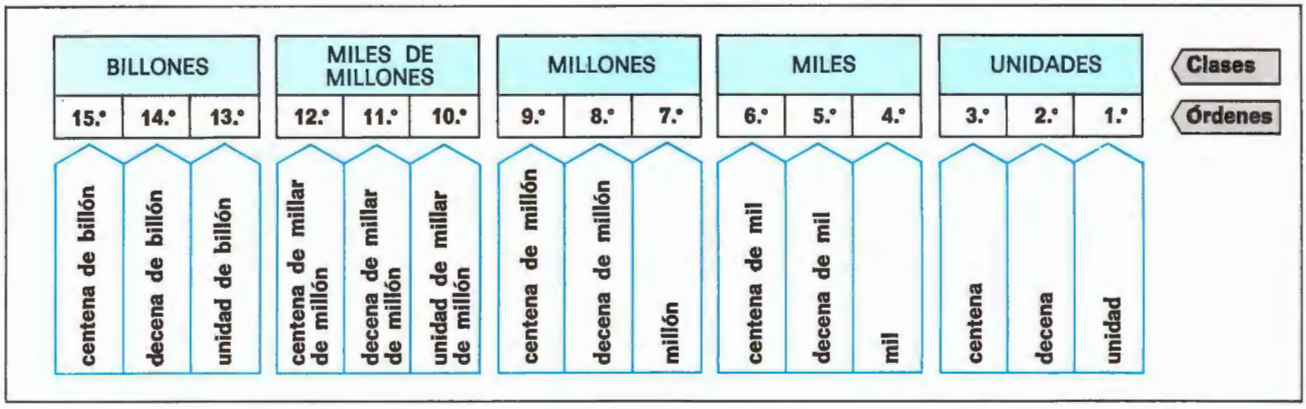
2. Clases y órdenes.

Clases

Cada tres órdenes forman una clase.

- La clase de las **unidades** está formada por las unidades de los órdenes primero, segundo y tercero.
- La clase de los **miles** está formada por las unidades de los órdenes cuarto, quinto y sexto.
- La clase de los **millones** está formada por las unidades de los órdenes séptimo, octavo y noveno.
- La clase de los **miles** de **millones** está formada por las unidades de los órdenes décimo, undécimo y duodécimo.
- Después siguen las clases de los **billones,** de los **miles de billones,** etc.

En el siguiente cuadro figuran las clases y las unidades que las forman.



Para leer un número como el 9743640375862 hacemos la división en grupos de tres cifras:

$$9_2743.640_1375.862$$

Se lee:

Nueve billones setecientos cuarenta y tres mil seiscientos cuarenta millones trescientos setenta y cinco mil ochocientos sesenta y dos.

1. Lee los siguientes números:

425347896	52678978	53964301
57282974	800134567	532147865
444555666	11133426	345864321
597824367	34654386	961432564

2. Contesta:

- ¿Cuántas unidades son 3 decenas de millón?
- ¿Cuántas unidades tiene 1 centena de millar de millón?
- ¿Qué es mayor, 1 millón o 1.000 millares?

3. Descomposición polinómica de números.

Millones			Miles			Unidades		
C	D	U	C	D	U	C	D	U
		5	2	4	6	3	2	7

Un número admite varias descomposiciones en suma.

Así, el número **5,246.327** se puede descomponer así:

5,246.327 → 5 millones + 246.327 u.
→ 52 cm + 46.327 u.
→ 524 dm + 63 c + 27 u.

La descomposición más usual es aquella que expresa el número como una suma de sus diversos órdenes de unidades.

5,246.327 = 5 millones + 2 cm + 4 dm + 6 m + 3 c + 2 d + 7 u

5,246.327 = 5,000.000 + 200.000 + 40.000 + 6.000 + 300 + 20 + 7

5,246.327 = 5×1,000.000 + 2×100.000 + 4×10.000 + 6×1.000 + 3×100 + 2×10 + 7

Esta es la descomposición polinómica del número **5,246.327.**

1. Termina de escribir la descomposición polinómica de los números siguientes:

a) 8.745 = **8.000** + **700** + **40** + **5**
8.745 = 8 × 1.000 + ... + ... + ...

b) 9.742 = 9 × ... + ... + ... + ...

c) 328.649 = 3 × ... + ... + ... + ... + ... + ...

d) 569.351 = 5 × ... + ... + ... + ... + ... + ...

2. Haz la descomposición polinómica de los siguientes números:

83.426 78.596 345.879 2,345.627 4,656.058

3. Escribe los números que corresponden a las siguientes descomposiciones:

a) 6 × 1,000.000 + 7 × 100.000 + 5 × 10.000 + 3 × 1.000 + 6 × 100 + 8 × 10 + 3

b) 5 × 100.000 + 3 × 10.000 + 7 × 1.000 + 8 × 100 + 4 × 10 + 6

c) 3 × 1.000 + 8 × 100 + 6 × 10 + 4

4. Observa estos números:

846327 57963426 589326486 2345728 74382564 56734259

a) Escribe cómo se leen.

b) Haz la descomposición polinómica de cada uno.

c) Ordénalos de mayor a menor.

d) Halla el valor de posición de la cifra 3 en cada número.

4. Sistema de numeración de base dos.

En el sistema de numeración de **base dos** o **binario** se utilizan sólo dos cifras, el 0 y el 1, para escribir todos los números.

El principio fundamental en el sistema binario es el siguiente.

En el sistema binario cada dos unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediato superior.

Paso de la base diez a la base dos

Para pasar un número de base diez a base dos, se divide el número por 2, y el cociente obtenido se vuelve a dividir por 2, y así sucesivamente, hasta encontrar un cociente que valga 1.

Vamos a pasar 15 y 45 a base dos

15 | 2

- Unidad de 1.er orden → **1** 7 | 2
- Unidad de 2.° orden → **1** 3 | 2
- Unidad de 3.er orden → **1** **1**
- Unidad de 4.° orden

4.°	3.°	2.°	1.°	Órdenes
1	1	1	1	

15 = 1111(dos)

45 | 2

- Unidad de 1.er orden → **1** 22 | 2
- Unidad de 2.° orden → **0** 11 | 2
- Unidad de 3.er orden → **1** 5 | 2
- Unidad de 4.° orden → **1** 2 | 2
- Unidad de 5.° orden → **0** **1**
- Unidad de 6.° orden

6.°	5.°	4.°	3.°	2.°	1.°	Órdenes
1	0	1	1	0	1	

45 = 101101(dos)

Paso de base dos a base diez

Para pasar un número de base dos a base diez es conveniente tener presente el valor de las unidades de los diversos órdenes.

Séptimo orden	Sexto orden	Quinto orden	Cuarto orden	Tercer orden	Segundo orden	Primer orden
grupo de 64	grupo de 32	grupo de 16	grupo de 8	grupo de 4	grupo de 2	grupo de 1

4.°	3.°	2.°	1.°	Órdenes
8	4	2	1	Valor
1	1	0	1	

$1101_{(dos)} = 13$

Pasemos a base diez el número $1101_{(dos)}$.

1 grupo de 8 → 8
1 grupo de 4 → 4
0 grupos de 2 → 0
1 unidad → 1

$1101_{(dos)}$ → 13

Cálculo mental, cálculo rápido

1. ¿Cuántas decenas tiene 1 centena? ¿Y 5 centenas?

2. ¿Cuántas centenas tiene 1 millar? ¿Y 6 millares?

3. ¿Cuántos millares tiene 1 decena de millar? ¿Y 4 decenas de millar?

4. ¿Cuántas centenas de millar son 1 millón? ¿Y 7 millones?

5. ¿Cuántos ceros hay que poner a la derecha de 1 para escribir 1 millón?

6. ¿Cuántos ceros hay que poner a la derecha de 1 para escribir cien mil?

7. ¿Cuántos ceros hay que poner a la derecha de 1 para escribir 10 millones?

8. ¿Cuántos ceros hay que poner a la derecha de 1 para escribir 1 billón?

Ejercicios y problemas

1. ¿Qué significa la primera cifra de la izquierda en un número de dos cifras? ¿Y en un número de cuatro cifras? ¿Y en un número de cinco cifras?

2. ¿Cuántas decenas tiene una unidad de quinto orden?

3. Indica los órdenes de:

   a) Las decenas simples.
   b) Las decenas de millar.
   c) Las unidades de millón.
   d) Las decenas de millón.
   e) Las centenas de millón.
   f) El billón.

4. Escribe los números:

   - Ocho millones trescientos cuatro mil seis.
   - Setenta y dos millones cuatrocientos veinte mil ochenta y siete.
   - Cinco billones setecientos veinte mil seiscientos treinta millones ochocientos cincuenta y cuatro mil setecientos ochenta y cuatro.

5. Haz las divisiones en grupos de tres cifras y lee los siguientes números:

   6235759 42127652 645327924 5284375968 74345688 444555625

6. Indica el valor de posición de la cifra 6 en cada uno de los números del ejercicio anterior.

7. Un número está comprendido entre 2 billones y 3 billones.
   ¿Cuántas cifras tiene ese número?

8. ¿Cuántos ceros hay que escribir a la derecha del número 32456 para que el 3 pase a ser la cifra de las centenas de millón?

9. Escribe de $10_{1}000.000$ en $10_{1}000.000$ desde $20_{1}000.000$ hasta $100_{1}000.000$.

10. ¿Cuántos millares son 1 unidad de cuarto orden? ¿Y 1 unidad de quinto orden?

11. Observa el número 943751026.

Millones			Miles o millares			Unidades			Clases
9.º	8.º	7.º	6.º	5.º	4.º	3.º	2.º	1.º	Órdenes
C	D	U	C	D	U	C	D	U	
9	**4**	**3**	**7**	**5**	**1**	**0**	**2**	**6**	

- ¿Cuál es la cifra de las unidades de mil o millares? ¿Cuántos millares tiene el número?
- ¿Cuál es la cifra de las decenas de mil o decenas de millar? ¿Cuántas decenas de millar tiene el número?
- ¿Cuántas decenas tiene el número dado? ¿Cuántas decenas de millón tiene? ¿Cuál es la cifra de las decenas de millón?

Escribe cómo se lee el número dado y haz su descomposición polinómica.

12. Escribe cómo se leen los siguientes números:

$3_{2}425.648_{1}159.864$ $5_{2}328,734_{1}483.187$ $4_{2}286.354_{1}284.327$

13. Divide los siguientes números en grupos de tres y después escribe cómo se leen:

7432864132791 9214635843972 834561043149

14. Escribe el siguiente número:

Un billón setecientos cuarenta mil trescientos veinte millones ochocientos veinticinco mil setecientos veinticinco.

15. Una bombilla encendida significa 1 y si está apagada significa 0.

¿Qué número en base 2 representa cada una de las siguientes series de bombillas?

16. Representa con bombillas encendidas o apagadas el número $11110_{(dos)}$.

17. Escribe en base dos estos números:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 33, 44, 55, 72, 81, 90

18. Pasa a base diez los siguientes números:

$111_{(dos)}$ $101_{(dos)}$ $1111_{(dos)}$ $101101_{(dos)}$ $11111_{(dos)}$ $110011_{(dos)}$

19. Escribe con cifras romanas:

a) El año en que se descubrió América.
b) El año en que termina el siglo actual.
c) El año en que naciste.
d) El año actual.

20. Escribe en números romanos del 1 al 100 y los números 3.946, 3.596, 2.858, 6.25, 13.849.

1. Problemas combinados de sumar y restar. I.

Peso bruto - peso neto

Lee atentamente la parte superior de la lata de conservas.

- **El peso bruto** es el peso de la mercancía más el peso del embalaje o caja que contiene la mercancía.
- **El peso neto** es sólo el peso de la mercancía.
- **La tara** es el peso del embalaje.

Entre el peso bruto, el peso neto y la tara existe esta relación:

tara = peso bruto − peso neto

La tara es igual al peso bruto menos el peso neto.

1. Observa la ilustración anterior, resuelve y contesta:

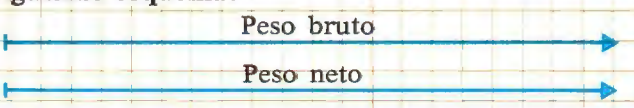
- ¿Cuál es la tara en la lata de conservas?
- De la resta: tara = peso bruto − peso neto, escribe una suma y una resta.

2. Lee lo que dice la envoltura de la lata de sardinas:

¿Cuánto pesa el aceite y las sardinas que hay en la lata?

¿Cuánto pesa la lata?

3. ¿Por qué está mal hecho el siguiente esquema?



4. Resuelve este problema:

Una persona compra un piso por 3,250.000 ptas. Se gasta en repararlo (reformas) 350.000 ptas. Después lo vende por 4,200.000 ptas.

Termina el enunciado de este problema y halla la solución.

5. Completa la tabla siguiente:

Precio de compra	2.350 ptas.	5.728 ptas.	4.275 ptas.	1.743 ptas.	
Precio de venta	2.875 ptas.	7.325 ptas.			12.748 ptas.
Ganancia			1.527 ptas.		3.249 ptas.
Pérdida				186 ptas.	

2. Problemas combinados de sumar y restar. II.

Un padre tenía una cantidad de dinero y dio a sus hijos las siguientes cantidades:

A Juan, 325 pesetas; a Pedro, 132 pesetas más que a Juan, y a Luis, 52 pesetas menos que a Juan y a Pedro juntos. Al final el padre se gastó 863 pesetas y le sobraron 280 pesetas.

¿Qué cantidad de dinero tenía el padre al principio?

Observa cómo se resuelve este problema:

PRIMER PASO

Dinero que recibió cada hijo:

Juan → 325 pesetas

Pedro → 325 + 132 = 457 pesetas

Luis → 325 + 457 − 52 = 782 − 52 = 730 pesetas

SEGUNDO PASO

Total de dinero que recibieron los tres hijos:

325 + 457 + 730 = 1.512 pesetas

TERCER PASO

Dinero que tenía el padre después del reparto:

Se gastó → 863

Le sobraron → + 280

1.143 pesetas

CUARTO PASO

Dinero que tenía el padre al principio:

1.512 + 1.143 = 2.655 pesetas.

El padre tenía al principio 2.655 pesetas.

1. Resuelve estos problemas:

- Una persona que tiene 3.000 pesetas ha realizado cuatro gastos diferentes y al final le quedan 250 pesetas. Se acuerda de que tres de los gastos realizados fueron 1.240 pesetas, 578 pesetas y 750 pesetas.

  ¿Cuál es el importe del gasto que no recuerda?

- Una señora gasta 1.240 pesetas en carne, 596 pesetas en queso y 650 pesetas en fruta. Le faltan 230 pesetas para pagar el total.

  ¿Cuánto dinero lleva la señora?

- Antonio tiene 270 pesetas más que Juan y Luis tiene 780 pesetas menos que Juan.

  ¿Cuánto dinero reúnen entre los tres si Antonio tiene 2.000 pesetas?

Cálculo mental, cálculo rápido

1. Procedimiento de compensación:

Observa el ejercicio resuelto y haz las sumas que siguen por el procedimiento de compensación.

$$81 + 59 = 80 + 60 = 140$$

a) 21 + 39 c) 61 + 49 e) 27 + 43 g) 37 + 23

b) 41 + 59 d) 17 + 13 f) 37 + 53 h) 51 + 29

Ejercicios y problemas

1. Si **a** es un número de dos cifras y **b** un número de una cifra:

a) ¿Cuál es el mayor número que puede ser **a** + **b**?

Como el mayor número de dos cifras es 99 y el mayor número de una cifra es 9, entonces el mayor número que puede ser **a** + **b** es **99 + 9 = 108.**

b) ¿Cuál es el mayor número que puede ser **a** − **b**?

El mayor número de dos cifras es ...

El menor número de una cifra es ...

El mayor número que puede ser **a** − **b** es ...

c) ¿Cuál es el menor número que puede ser **a** + **b**?

d) ¿Cuál es el menor número que puede ser **a** − **b**?

e) ¿Cuál es el mayor número que puede ser **a** + **a**?

f) ¿Cuál es el mayor número que puede ser **b** + **b**?

2. Si **a** es un número de tres cifras y **b** un número de dos cifras:

a) ¿Cuál es el mayor número que puede ser **a** + **b**?

b) ¿Cuál es el menor número que puede ser **a** + **b**?

c) ¿Cuál es el menor número que puede ser **a** − **b**?

d) ¿Cuál es el mayor número que puede ser **a** − **b**?

e) ¿Cuál es el mayor número que puede ser **a** + **a**?

f) ¿Cuál es el mayor número que puede ser **b** + **b**?

3. Si **a** es un número de seis cifras y **b** un número de una cifra:

a) ¿Cuál es el mayor número que puede ser **a** + **b**?

b) ¿Cuál es el menor número que puede ser **a** + **b**?

c) ¿Cuál es el mayor número que puede ser **a** − **b**?

d) ¿Cuál es el menor número que puede ser **a** − **b**?

e) ¿Cuál es el mayor número que puede ser **a** + **a**?

f) ¿Cuál es el menor número que puede ser **a** + **a**?

4. Recuerda que la diferencia de dos números no varía cuando al minuendo y al sustraendo se les suma el mismo número. Teniendo en cuenta la diferencia 9 − 6 = 3, calcula:

a) (9+1) − (6+1) c) (9+1.000) − (6+1.000)

b) (9+11) − (6+11) d) (9+896) − (6+896)

5. Completa en tu cuaderno las casillas de la tabla:

a	1.548	3.426	5.726	12.562
b	649	1.096	2.347	5.428
c	243	839	1.725	3.746
a + 0				
0 + a				
a + b				
b + a				
(a+b) + c				
a + (b+c)				
(a−b) − c				
a − (b−c)				

6. Completa los números que faltan en las siguientes sumas y restas:

$$\begin{array}{r} 3\,\square\,1 \\ +\ \square\,4\,\square \\ \hline 4\,6\,7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,3\,7\,9 \\ 1\,2\,8\,\square \\ +\ \square\,\square\,2\,9 \\ \hline 7\,0\,\square\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \square\,2\,\square \\ +\ 3\,\square\,3 \\ \hline 9\,9\,8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \square\,8\,\square \\ -\ 1\,\square\,4 \\ \hline 6\,6\,2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9\,\square\,5 \\ -\ \square\,1\,\square \\ \hline 6\,3\,1 \end{array}$$

7. La diferencia de dos números es 324. El número menor es 2.525. Halla el número mayor.

8. Completa los números que faltan:

a) $\begin{array}{r} 6\,9\,3\,5 \\ -\ \square\,\square\,\square\,\square \\ \hline 2\,3\,5\,7 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} \square\,9\,7\,\square \\ -\ 3\,\square\,\square\,5 \\ \hline 2\,5\,6\,1 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 6\,3\,4\,2\,1 \\ -\ \square\,\square\,\square\,\square\,\square \\ \hline 1\,3\,5\,7\,9 \end{array}$

9. La suma de dos números es 2.345.628, y uno de ellos es 647.329.
¿Cuál es el otro?

10. ¿Cuánto aumenta el número 87 si se pone un cero a su derecha? ¿Y si se ponen dos ceros a su derecha?

11. ¿Cuánto aumenta el número 87 si se pone un cero entre el 8 y el 7?

12. Un libro que costaba 348 ptas. ha aumentado su precio en 137 ptas.
¿Cuál es el nuevo precio?

13. Mi madre tiene 38 años y yo 12.
¿Cuántos años tendrá mi madre cuando yo tenga 29 años?

14. Si cambias el 2 por un 1 en el número 325, ¿cuánto menor será el número?

15. Elige dos números **a** y **b**. Halla su suma **(s) = a + b** y su diferencia **(d) = a − b**.
Ahora suma los dos números **s + d**. Compara esta suma con el mayor de los números.
¿Qué relación hay entre ellos?

Halla la diferencia **s − d**. Compara esta diferencia con el menor de los números **b**.
¿Qué relación hay entre ellos?

1. Algunas multiplicaciones abreviadas.

Multiplicación normal	Multiplicación abreviada
325 × 9 = 2925	3250 − 325 = 2925

Multiplicación de un número por 9

Se quiere multiplicar **325 × 9**.

Observa que:

$325 \times 9 = 325 \times (10-1) = 325 \times 10 - 325 = 3.250 - 325.$

Para multiplicar un número por 9 se agrega un cero al número y después se resta dicho número.

Multiplicación normal	Multiplicación abreviada
496 × 99 = 4464 + 44640 = 49104	49600 − 496 = 49104

Multiplicación de un número por 99

Se quiere multiplicar **496 × 99**.

Observa que:

$496 \times 99 = 496 \times (100-1) = 496 \times 100 - 496 =$
$= 49.600 - 496.$

Para multiplicar un número por 99 se agregan dos ceros al número y después se resta dicho número.

Multiplicación de un número de dos cifras terminado en 5 por sí mismo.

Los productos de 15×15, 25×25, 35×35, 45×45, etc., acaban todos en **25**.

Observa cómo se obtiene el producto completo:

1 × siguiente (2) = 2 → 15 × 15 = 2**25**

2 × siguiente (3) = 6 → 25 × 25 = 6**25**

3 × siguiente (4) = 12 → 35 × 35 = 12**25**

4 × siguiente (5) = 20 → 45 × 45 = 20**25**

1. Aplica las reglas anteriores para obtener los siguientes productos:

55 × 55	65 × 65	75 × 75	85 × 85	95 × 95
36 × 9	36 × 99	47 × 9	47 × 99	56 × 99

Actividades

1. Haz las siguientes multiplicaciones:

65×10	78×100	49×1.000	563×10.000	3×1.000
246×38	246×308	246×3.008	364×17.000	84×1.000

2. Cuando hay paréntesis, la operación que se hace primero es la que está dentro de él; pero si no hay paréntesis, las multiplicaciones tienen prioridad sobre las sumas y las restas.

Así: $6 + 54 \times 3 = 6 + 162 = 168$.

Calcula:

a) $7 + 35 \times 6$ b) $24 + 8 \times 25$ c) $36 \times 3 - 54$

3. Completa la tabla:

Cálculo	Se resuelve		Resultado
	Primero	Segundo	
$56 - 7 \times 3$	la multiplicación	la resta	$56 - 21 = 35$
$154 \times 7 + 264$			
$18 - 6 \times 3$			
$72 - 5 \times 8$			

4. La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de las sustracciones es $(b-c) \times a = b \times a - c \times a$. Aplica esta propiedad al cálculo de las siguientes multiplicaciones:

- $999 \times 12 = (1.000-1) \times 12 = 1.000 \times 12 - 1 \times 12 = 12.000 - 12 = \mathbf{11.988}$
- $999 \times 13 = (1.000-1) \times 13 = \ldots \times \ldots - \ldots \times \ldots = \ldots - \ldots = \ldots$
- $999 \times 15 = \ldots$
- $999 \times 56 = \ldots$

A la vista de estos ejercicios, escribe la regla práctica para multiplicar un número por 999.

5. En una multiplicación de números naturales $\underline{a} \cdot \underline{b}$ el número $\underline{a}$ tiene tres cifras y el $\underline{b}$ tiene una cifra.

- ¿Cuál es el mayor valor que puede ser $a \cdot b$?
- ¿Cuál es el mayor número de cifras que puede tener $a \cdot b$?
- ¿Cuál es el menor valor que puede tener $a \cdot b$?
- ¿Cuál es el menor número de cifras que puede tener el producto $a \cdot b$?

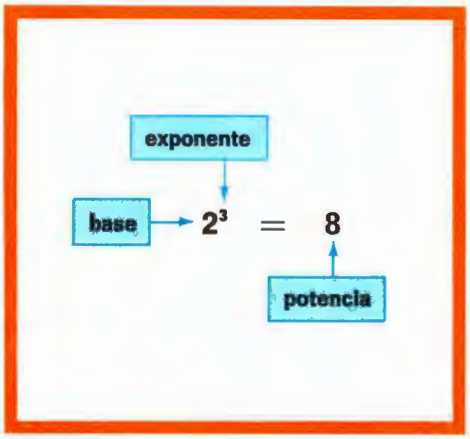
6. Si $\underline{a}$ tiene tres cifras y $\underline{b}$ tiene dos cifras.

- ¿Cuál es el mayor valor que puede tener $a \cdot b$?
- ¿Cuál es el menor valor que puede tener $a \cdot b$?

7. Si $\underline{a}$ tiene tres cifras y $\underline{b}$ tiene tres cifras.

- ¿Cuál es el menor número de cifras que puede tener el producto $a \cdot b$?
- ¿Cuál es el mayor número de cifras que puede tener el producto $a \cdot b$?

2. Potencias. I.



Potencia

Observa los siguientes productos:

$2\times2\times2$	$4\times4\times4\times4\times4$	5×5

Todos ellos tienen los factores iguales y se llaman potencias. Se escriben así:

$2\times2\times2 = 2^3$	$4\times4\times4\times4\times4 = 4^5$	$5\times5 = 5^2$

En la potencia $2^3 = 8$ el factor que se repite (2) se llama **base,** y el número de veces que se repite se llama **exponente.**

Una potencia es un producto de varios factores iguales.

Lectura

Observa en el siguiente cuadro cómo se leen las potencias. Cuando el exponente es **2**, la potencia se llama **cuadrado,** y cuando el exponente es **3**, la potencia se llama **cubo.**

Potencia	Se lee así	También se lee así
3^4	tres elevado a la cuarta	tres elevado a cuatro.
3^5	tres elevado a la quinta	tres elevado a cinco.
3^2	tres elevado al cuadrado	tres al cuadrado.
4^2	cuatro elevado al cuadrado	cuatro al cuadrado.
2^3	dos elevado al cubo	dos al cubo.

Potencias de exponente 1

La potencia de exponente 1 de un número es igual a dicho número:

$2^1 = 2$	$5^1 = 5$	$8^1 = 8$
$3^1 = 3$	$6^1 = 6$	$9^1 = 9$
$4^1 = 4$	$7^1 = 7$	$10^1 = 10$

1. Escribe en forma de potencia:

$3\times3\times3\times3$ $\quad 2\times2\times2$ $\quad 5\times5\times5$

2. Calcula el valor de las siguientes potencias:

$3^5 = 3\times3\times3\times3\times3 = 243$ $\quad 2^6 = \ldots$

$3^4 = \ldots$ $\quad 10^4 = \ldots$

3. Escribe cómo se leen 3^2, 4^2, 10^2, 5^3, 6^4, 7^2 y calcula su valor.

4. Escribe los cuadrados y los cubos de los números del 1 al 10 y apréndelos de memoria.

3. Potencias. II.

$10^1 = 10$

$10^2 = 10 \times 10 = 100$

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1.000$

$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$

$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100.000$

Potencia de base 10

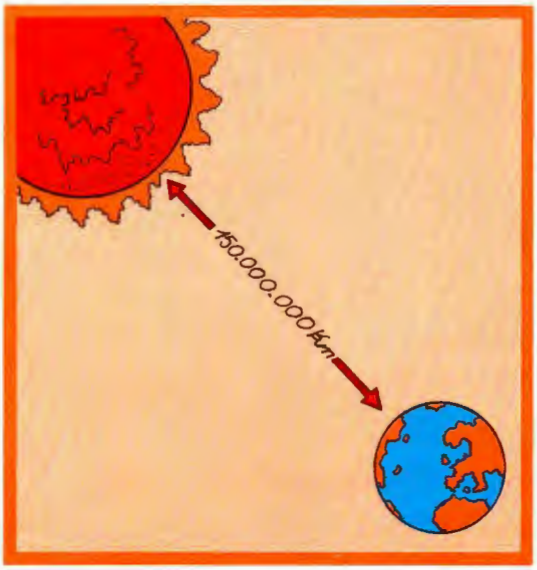
Fíjate en estas potencias de base 10.

En todos los casos el resultado es la unidad seguida de ceros. Cuenta los ceros que siguen a la unidad y comprueba que hay tantos ceros como indica el exponente.

Del mismo modo, la unidad seguida de ceros se puede escribir en forma de potencia:

$100 = 10^2$	$1.000 = 10^3$	$1{,}000.000 = 10^6$

Toda potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente.



Escritura de números grandes utilizando las potencias

En ocasiones hay que manejar números muy grandes. Estos números tienen una escritura más cómoda utilizando potencias.

EJEMPLOS:

- La distancia media de la Tierra al Sol es de ciento cincuenta millones de kilómetros.

$$150{,}000.000 = 15 \times 10{,}000.000 = 15 \times 10^7$$

- La población de la Tierra pronto será de cinco mil millones de habitantes.

$$5.000{,}000.000 = 5 \times 1.000{,}000.000 = 5 \times 10^9$$

Expresión polinómica de un número

La expresión polinómica de un número se puede escribir utilizando las potencias de 10.

EJEMPLO:

$$27.438 = \underbrace{20.000}_{2 \times 10.000} + \underbrace{7.000}_{7 \times 1.000} + \underbrace{400}_{4 \times 100} + \underbrace{30}_{3 \times 10} + \underbrace{8}_{8}$$

$$27.438 = 2 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 8$$

1. ¿Qué números son los siguientes?

a) 3×10^5 b) 56×10^6 c) 37×10^5

- Escribe la expresión polinómica de:

a) 5.328 b) 72.485 c) 85.732

2. El presupuesto del Estado español supera los 2 billones de pesetas.

Escribe esta cantidad utilizando las potencias de 10.

Cálculo mental, cálculo rápido

① 20×10	② 20×20	③ 20×30	④ 20×40	⑤ 20×50
⑥ 30×10	⑦ 30×20	⑧ 30×30	⑨ 30×40	⑩ 30×50
⑪ 40×10	⑫ 40×20	⑬ 40×50	⑭ 40×60	⑮ 40×70
⑯ 50×60	⑰ 50×70	⑱ 50×80	⑲ 50×90	⑳ 60×80

Ejercicios y problemas

1. Escribe en forma de potencia los siguientes productos de factores iguales:

a) $6 \times 6 \times 6$ b) $12 \times 12 \times 12 \times 12$

c) $15 \times 15 \times 15 \times 15 \times 15 \times 15$

2. Escribe en forma de producto las siguientes potencias y calcula su valor:

a) 5^6 b) 3^4 c) 3^5 d) 3^6

e) 2^5 f) 2^6 g) 2^7

3. Calcula:

10^2 11^2 12^2 13^2 14^2 15^2

16^2 17^2 18^2 19^2 20^2 25^2

4. Calcula:

10^5 10^6 10^7 10^8 10^9 10^{10}

5. Utilizando potencias, haz la descomposición polinómica de estos números:

a) 3.468 c) 9.741

b) 5.743 d) 156.724

6. ¿Qué números son?

a) 5×10^4 c) 24×10^5

b) 38×10^7 d) 9×10^9

7. Calcula:

a) $34 + 5 \times 8 - 3$ c) $36 \times 5 - 8$

b) $32 \times 40 - 5 \times 60$ d) $48 \times 3 - 16$

8. Un número se multiplica por 2.

¿Puede acabar en 3 el producto?

9. Un número se multiplica por 7.

¿Puede acabar en 6 el producto?

10. Un señor es dueño de 30 parcelas.

Por cada parcela percibe 300.000 pesetas de entrada más 248.000 pesetas que quedan para pagar en plazos.

¿Qué cantidad percibe el dueño de las parcelas una vez que las ha vendido y cobrado todas?

11. Una persona compra 35 rotuladores a 25 pesetas cada uno y 35 cuadernos a 15 pesetas cada uno.

Paga con 2 billetes de 1.000 pesetas.

¿Cuánto le devuelven?

12. Mi madre ha comprado 3 botellas de aceite a 160 pesetas cada una y 5 litros de leche a 60 pesetas cada uno.

Pagó con un billete de 1.000 pesetas.

¿Cuánto le devolvieron?

13. En un vivero han vendido en una semana 460 pinos a 4.300 pesetas cada uno y 240 abetos a 3.600 pesetas cada uno.

¿Cuál es el valor de la venta?

14. En un restaurante ofrecen el siguiente menú:

Primer plato	Segundo plato	Postre
cocido	carne asada	naranja
judías	pescado	manzana

¿Cuántos menús diferentes se pueden formar eligiendo un primer plato, un segundo plato y un postre?

15. Juan quiere comprar un automóvil.

En la fábrica le ofrecen dos modelos: uno de dos puertas y otro de cuatro puertas.

En ambos modelos hay coches de los colores rojo, azul, verde, marrón y blanco.

Halla el número de posibles elecciones que tiene Juan.

16. En una estadística del año 1979 se pueden leer los siguientes datos:

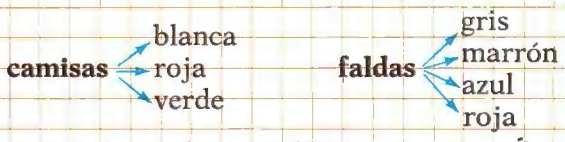
Países	Teléfonos por 1.000 hab.	Receptores de radio por 1.000 hab.
Alemania O.	343	329
Francia	330	330
Estados Unidos	747	1.895
Rusia	75	481
España	260	259

a) Halla el número de teléfonos y de receptores de radio que hay en cada país por cada millón de habitantes.

b) Averigua el número de millones de habitantes de cada uno de estos países e indica el número total aproximado de teléfonos y receptores de radio que tienen.

c) ¿Qué indica más claramente el nivel de equipamiento en teléfonos y aparatos de radio de un país, el número de aparatos por cada 1.000 habitantes o el número total de aparatos que hay en el país?

17. Laura puede elegir para vestirse entre:



¿De cuántas formas diferentes se puede vestir?

EL JUEGO DE LA MULTIPLICACIÓN RUSA

La multiplicación rusa se reduce a **multiplicar por 2** y **dividir por 2.**

Uno de los factores se multiplica por 2, a la vez que el otro se divide por 2.

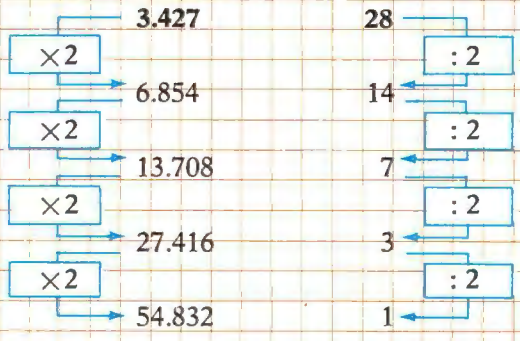
Estas multiplicaciones y divisiones por 2 se continuarán hasta que el factor que se divide dé de cociente 1.

Observa cómo se hace la multiplicación

3.427 × 28

Primer paso

Multiplicar y dividir por 2.



Segundo paso

Se tachan las filas en las que aparecen números pares en la segunda columna y se suman los números que quedan sin tachar.

	~~3427~~	~~28~~	par
	~~6854~~	~~14~~	par
	13708	7	
	27416	3	
+	54832	1	
	95956		

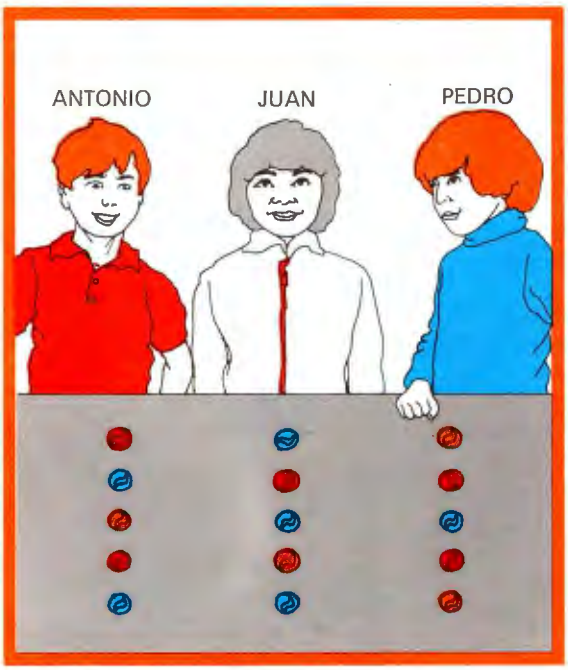
Por lo tanto, el producto
3.427 × 28 = **95.956.**

En la práctica, las multiplicaciones y divisiones por 2 se hacen mentalmente.

Haz por este procedimiento las siguientes multiplicaciones:

a) 251 × 64 b) 465 × 86 c) 67 × 52

1. División exacta. Equivalencias fundamentales.



División exacta. Términos

Se quiere repartir 15 canicas entre 3 niños: Antonio, Juan y Pedro.

¿Cuántas canicas corresponden a cada uno?

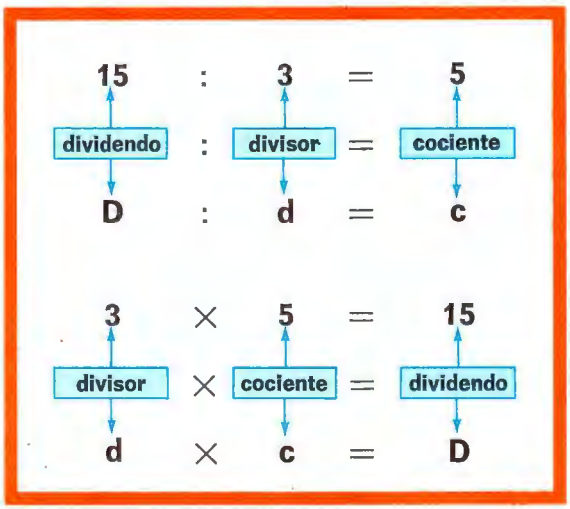
Número de niños	Número de canicas que tocan a cada niño	Número de canicas que se reparten
3	× □	= 15

El factor desconocido es el **cociente exacto** de los números 15 y 3. Es decir, □ = 15 : 3.

Este cociente exacto (5) es el número que multiplicado por 3 nos da 15.

En la división exacta 15 : 3 = 5, el número 15 es el **dividendo** y el número 3 es el **divisor**. El resultado, 5, es el **cociente**.

La división exacta es la operación que permite encontrar el factor desconocido de una multiplicación en la que se conocen el producto y el otro factor.



Equivalencias fundamentales

Los tres números 3, 5 y 15 están relacionados por una multiplicación y dos divisiones exactas:

$5 \times 3 = 15 \leftrightarrow 15 : 3 = 5 \leftrightarrow 15 : 5 = 3$

Estas igualdades son las **equivalencias fundamentales** de la división exacta.

En general, si **D** → dividendo, **d** → divisor, **c** → cociente, se tiene:

$D = d \times c \leftrightarrow D : d = c \leftrightarrow D : c = d$

En una división exacta el dividendo es igual al divisor por el cociente.

1. Escribe las divisiones exactas equivalentes a la multiplicación $6 \times 9 = 54$.

2. Responde:

¿Es lo mismo 36 : 4 que 4 : 36?

¿Tiene la división la propiedad conmutativa?

3. Calcula:

(64 : 4) : 2 y 64 : (4 : 2).

¿Tiene la división la propiedad asociativa?

4. Comprueba:

(36 + 4) : 2 = (36 : 2) + (4 : 2).

2. División entera por defecto y división entera por exceso.

La división exacta no siempre es posible

En una clase hay 16 alumnos sentados en filas de 6 asientos.

¿Cuántas filas de alumnos hay?

Se observa que no hay ningún número natural que multiplicado por 6 dé 16.

$6 \times 2 = 12$, que es menor que 16

$6 \times 3 = 18$, que es mayor que 16

Esto indica que no existe el cociente exacto 16 : 6.

Los números 2 y 3 son los **cocientes aproximados.**

DIVISIÓN ENTERA POR DEFECTO

$$\begin{array}{r|l} 16 & 6 \\ 4 & 2 \end{array}$$

resto por defecto — cociente por defecto

División entera por defecto

La división entera por defecto $\begin{array}{r|l} 16 & 6 \\ 4 & 2 \end{array}$

indica que hay 2 filas de alumnos y 4 alumnos más

La relación entre los números 16, 6, 2 y 4 es:

$$\underset{\text{dividendo}}{16} = \underset{\text{divisor}}{6} \times \underset{\text{cociente por defecto}}{2} + \underset{\text{resto por defecto}}{4}$$

$$D = d \times c + r$$

DIVISIÓN ENTERA POR EXCESO

$$\begin{array}{r|l} 16 & 6 \\ 2 & 3 \end{array}$$

resto por exceso — cociente por exceso

División entera por exceso

La división entera por exceso $\begin{array}{r|l} 16 & 6 \\ 2 & 3 \end{array}$

nos indica que hay 3 filas de alumnos y sobran 2 puestos.

La relación entre 16, 6, 3 y 2 es:

$$\underset{\text{dividendo}}{16} = \underset{\text{divisor}}{6} \times \underset{\text{cociente por exceso}}{3} - \underset{\text{resto por exceso}}{2}$$

Observa que sumando el resto por defecto y el resto por exceso da el divisor:

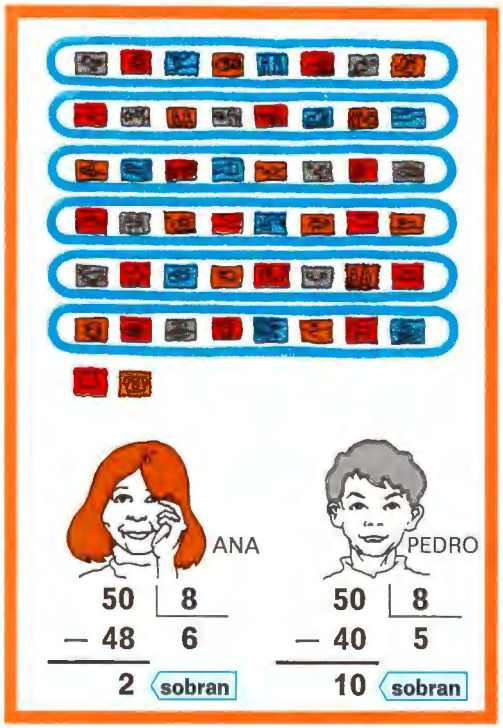
$$2 + 4 = 6$$

El cociente por defecto es el mayor número que multiplicado por el divisor da un número menor que el dividendo.

El cociente por exceso es el menor número que multiplicado por el divisor da un número mayor que el dividendo.

El resto por defecto más el resto por exceso es igual al divisor.

3. Prueba de la división.



La división entera que más se utiliza es la división entera por defecto.
En la división entera por defecto se tiene la siguiente relación:
dividendo = divisor × cociente + resto.

$$D = d \times c + r$$

Veamos ahora una propiedad del resto.

¿Cuántas páginas de un álbum se pueden llenar con 50 cromos si en cada página se pueden poner 8 cromos?

Observa cómo resolvieron el problema Ana y Pedro.

Ana hizo bien la división.

No pueden sobrar 10 cromos, como dice Pedro, porque en ese caso se puede llenar una página más del álbum.

El resto es menor que el divisor

La prueba de una división consiste en comprobar que se cumplen las dos relaciones siguientes:

1.° **Que el resto es menor que el divisor ($r < d$).**

2.° **Que el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto ($D = d \times c + r$).**

1. Haz la prueba de la siguiente división:

3429	4
22	857
29	
1	

2. Contesta:

- El divisor de una división es 4.

  ¿Puede ser el resto 0? ¿Y 1? ¿Y 2? ¿Y 3? ¿Y 4? ¿Cómo ha de ser siempre el resto de una división?

- ¿Está bien hecha esta división?

2713	5
21	541
13	
8	

¿Por qué?

3. Halla el dividendo de esta división:

$c = 761$, $d = 7$ y $r = 1$

4. Haz las siguientes divisiones y sus pruebas:

78.245 : 32	75.428 : 325	45.634 : 42
56.327 : 28	743.576 : 2.345	26.348 : 56

5. Observa estas dos divisiones:

$0 : 6 = 0$ $\qquad$ $6 : 0 = ?$

La segunda no se puede hacer porque no hay ningún número que multiplicado por 0 dé 6. El divisor no puede ser 0.

- Indica cuáles de las siguientes divisiones son imposibles:

  0 : 8 $\quad$ 7 : 0 $\quad$ 0 : 4 $\quad$ 5 : 0 $\quad$ 9 : 0

4. Alteraciones del cociente en la división exacta.

PRIMER CASO

Cuando sólo se multiplica o se divide por un número el dividendo o el divisor.

Consideremos la división **48 : 8 = 6.**

Si se multiplica por 2 el dividendo, el cociente queda multiplicado por 2:

$48 \times 2 = 96$

$$\begin{array}{r|l} 96 & 8 \\ 16 & 12 \\ 0 & \end{array}$$

Si se divide por 2 el dividendo, el cociente queda dividido por 2:

$48 : 2 = 24$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 8 \\ 0 & 3 \end{array}$$

Si se multiplica por 2 el divisor, el cociente queda dividido por 2:

$8 \times 2 = 16$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 16 \\ 0 & 3 \end{array}$$

Si se divide por 2 el divisor, el cociente queda multiplicado por 2:

$8 : 2 = 4$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 4 \\ 08 & 12 \\ 0 & \end{array}$$

Si el dividendo se multiplica o se divide por un número, el cociente queda multiplicado o dividido por dicho número.

Si el divisor se multiplica o se divide por un número, el cociente queda dividido o multiplicado por dicho número.

48 : 8 = 6

LUIS

48 × 2 = 96 **8 × 2 = 16**

$$\begin{array}{r|l} 96 & 16 \\ 0 & 6 \end{array}$$

48 : 8 = 6

ANA

48 : 2 = 24 **8 : 2 = 4**

$$\begin{array}{r|l} 24 & 4 \\ 0 & 6 \end{array}$$

SEGUNDO CASO

Cuando se multiplican o se dividen por el mismo número el dividendo y el divisor.

Observa de nuevo la división **48 : 8 = 6.**

- Luis ha multiplicado por 2 tanto el dividendo como el divisor.

  El cociente obtenido (6) no ha variado.

- Ana ha dividido por 2 tanto el dividendo como el divisor.

  El cociente obtenido (6) tampoco ha variado.

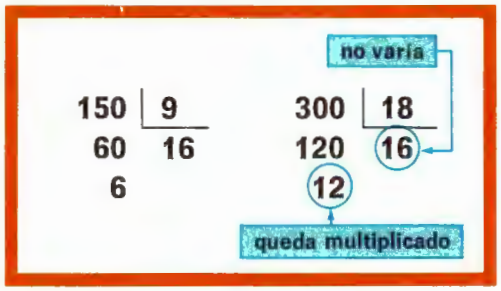
Se observa que el cociente no varía cuando se multiplican o se dividen por el mismo número el dividendo y el divisor.

Si el dividendo y el divisor de una división exacta se multiplican o dividen por el mismo número, el cociente no varía.

1. Completa sin hacer las divisiones:

Dividendo	48	48 × 2	48 : 2	48	48	48 × 2	48 : 2
Divisor	6	6	6	6 × 2	6 : 2	6 × 2	6 : 2
Cociente							

5. Alteraciones del cociente y del resto en la división entera.



PRIMER CASO

Cuando el dividendo y el divisor se multiplican por el mismo número.

Multipliquemos por 2 el dividendo y el divisor de esta división: **150 | 9**

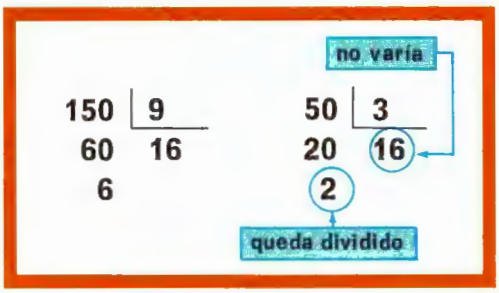
$150 \times 2 = 300$; $9 \times 2 = 18$.

Comparemos estas dos divisiones: 300 | 18 y 150 | 9

Se observa que el cociente (16) no varía, pero, en cambio, el resto queda multiplicado por 2:

$$6 \times 2 = 12$$

Si se multiplican el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no varía, pero el resto queda multiplicado por ese número.



SEGUNDO CASO

Cuando el dividendo y el divisor se dividen por el mismo número.

Dividamos por 3 el dividendo y el divisor de esta división: **150 | 9**

$150 : 3 = 50$; $9 : 3 = 3$.

Comparemos estas dos divisiones: 50 | 3 y 150 | 6

Se observa que el cociente (16) no varía, pero, en cambio, el resto queda dividido por 3:

$$6 : 3 = 2$$

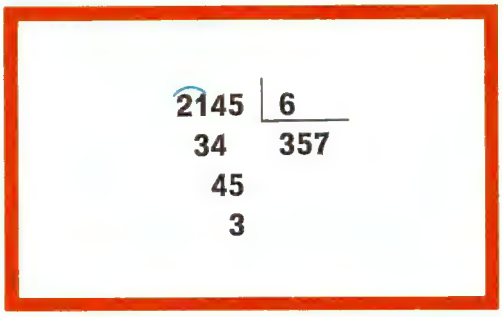
Si se divide el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no varía, pero el resto queda dividido por ese número.

1. Completa el siguiente cuadro:

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
92	20	4	12
92 × 2	20 × 2		
92 × 3	20 × 3		
92 × 4	20 × 4		
92 : 2	20 : 2		
92 : 4	20 : 4		

¿Qué observas en los cocientes y en los restos obtenidos?

6. Práctica de la división. Casos.



2145	6
34	357
45	
3	

PRIMER CASO

Cuando el dividendo tiene varias cifras y el divisor tiene una.

Observa cómo se hace esta división: **2.145** | **6**

Antes de empezar a dividir se separan con un arco las cifras necesarias para formar un número mayor o igual que el divisor.

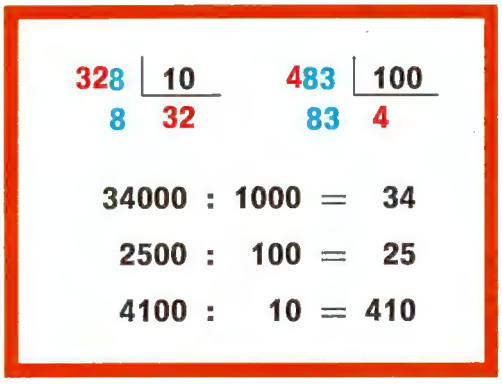
196348	318
0554	617
2368	
142	

SEGUNDO CASO

Cuando el dividendo y el divisor tienen varias cifras.

Observa cómo se hace esta división: **196.348** | **318**

Como siempre, se empieza separando del dividendo las cifras necesarias para formar un número mayor o igual que el divisor.



328	10	483	100
8	32	83	4

34000 : 1000 = 34

2500 : 100 = 25

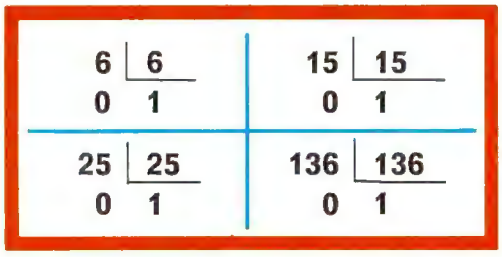
4100 : 10 = 410

TERCER CASO

Cuando se divide por la unidad seguida de ceros.

Observa las divisiones por 10, 100, 1.000.

Para dividir un número por la unidad seguida de ceros se separan de su derecha tantas cifras como ceros tenga la unidad. El número obtenido a la izquierda de las cifras separadas es el cociente y el número formado por las cifras separadas es el resto.

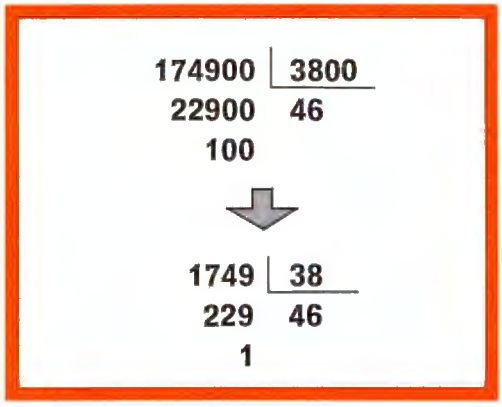


6 | 6	15 | 15
0 1	0 1
25 | 25	**136 | 136**
0 1	0 1

CUARTO CASO

Cuando el dividendo es igual al divisor.

Observa que en estas divisiones el cociente es 1 y el resto es 0.



174900	3800
22900	46
100	

1749	38
229	46
1	

QUINTO CASO

Cuando el dividendo y el divisor acaban en ceros.

Si sólo interesa el cociente se pueden suprimir igual número de ceros en el dividendo y en el divisor.

Para hacer la división **174900** | **3800** se suprimen dos ceros.

El cociente es el mismo en las dos divisiones y el resto queda dividido por 100.

Cálculo mental, cálculo rápido

1. División por 5 de un número terminado en cero.

Observa el ejemplo: $80 : 5 = (80 : 10) \times 2 = 8 \times 2 = 16$.

Regla para dividir por 5 un número acabado en cero: **Se suprime el 0 y se multiplica por 2.**

Haz mentalmente:

① 60 : 5	② 90 : 5	③ 120 : 5	④ 130 : 5	⑤ 110 : 5	⑥ 140 : 5
⑦ 150 : 5	⑧ 160 : 5	⑨ 170 : 5	⑩ 180 : 5	⑪ 190 : 5	⑫ 210 : 5

Ejercicios y problemas

1. Calcula $(9+12) : 3 = 21 : 3 = \ldots$

Después: $(9+12) : 3 = (9 : 3) + (12 : 3) = \ldots$

Completa este enunciado: «Para dividir una suma por un número, se divide cada sumando por dicho número y al final se ...»

2. Multiplica el número 50 por 3. El resultado divídelo por 3.

¿Qué obtienes?

¿Qué ocurre si un número se multiplica y se divide por un mismo número?

3. En la división exacta $42 : 7 = 6$, escribe la multiplicación correspondiente.

4. ¿A qué es igual el dividendo de una división exacta? Escribe la fórmula.

5. ¿A qué es igual el dividendo de una división entera por defecto? Escribe la fórmula.

6. Un barco recorre por término medio 56 kilómetros por hora.

¿Cuántas horas emplea para recorrer 672 kilómetros?

7. En la división $70 : 8$, calcula el cociente por defecto y el cociente por exceso.

8. El divisor de una división es 8.

¿Puede ser el resto 1? ¿Y 5? ¿Y 8?

9. El divisor de una división es 7.

¿Cuáles son los restos posibles?

10. Si en lugar de hacer la división $830 \mid 20$ se hace la división $83 \mid 2$ ¿se obtiene el mismo cociente?

¿Qué le ocurre al resto?

11. En un aeropuerto aterriza un avión cada 10 minutos.

¿Cuántos aviones aterrizan en un día?

12. Un tren recorre 82 kilómetros por hora.

¿En cuánto tiempo recorre 1.066 kilómetros?

13. Cuenta los latidos que da tu corazón en 1 minuto.

¿Cuál es el número aproximado de latidos que da tu corazón en 1 hora?

¿Y en medio minuto?

14. Un automovilista ha recorrido 864 kilómetros en 12 horas.

¿Cuál es la velocidad media (kilómetros por cada hora) que ha llevado?

15. En una piscina caben 45.000 litros.

¿Cuánto tiempo tarda en llenarse mediante un grifo que echa 15 litros por minuto?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS COMBINADOS (+, −, ×, :)

1. Carlos tiene tres hermanos. Cada uno le da 50 pesetas el día de su santo, y sus 4 tíos le dan 150 pesetas cada uno. Con el dinero que reúne compra pasteles.

¿Cuántos pasteles puede comprar si cada pastel vale 10 pesetas?

2. Piensa un número. Multiplícalo por 2. Súmale 6. Divide el resultado por 2. Resta el número que pensaste. Resulta 3.

Repite este ejercicio con otros números.

3. Un señor ha recorrido 450 km por una carretera donde la velocidad máxima es 90 km/h, y 400 km por una carretera cuya velocidad máxima es 100 km/h. Los dos tramos de carretera los recorrió sin pararse y tardó 8 horas y 30 minutos en hacer el viaje.

¿Cometió alguna infracción este señor?

4. Por poner 6 bujías a un coche y por limpiar el motor le cobraron a Luis 1.300 pesetas. La limpieza del motor costó 610 pesetas.

¿Cuánto costó cada bujía?

5. Por poner 4 puertas y hacer un marco un carpintero ha cobrado 7.200 pesetas. Por hacer el marco cobró 1.200 pesetas.

¿Cuánto cobró por poner cada puerta?

6. Por 5 libros y 6 cuadernos se han pagado 805 pesetas. Los cuadernos valen 30 pesetas cada uno.

¿Cuánto vale cada libro?

7. Una señora se ha gastado en el mercado 840 pesetas para comprar fruta. Ha comprado 6 kilos de manzanas a 80 pesetas el kilo y 3 kilos de peras.

¿Cuánto le costó cada kilo de peras?

8. Una señora se gastó en el mercado 490 pesetas. Compró 4 kilos de tomates y 3 kilos de peras a 90 pesetas el kilo.

¿Cuánto costó cada kilo de tomates?

9. Luis compró 8 cuadernos a 25 pesetas cada uno y 7 bolígrafos. En total se gastó 298 pesetas.

¿Cuánto costó cada bolígrafo?

10. Se llena el depósito de gasolina de un coche con 40 litros cuando el cuentakilómetros marca 21.685 km. La gasolina se acaba cuando el cuentakilómetros marca 22.085 km.

¿Cuántos litros de gasolina gasta el coche cada 100 kilómetros?

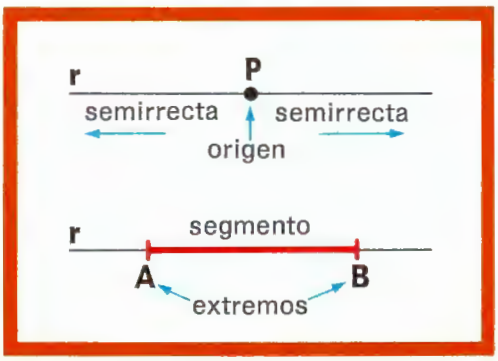
11. Un señor compra un televisor en color por 96.000 pesetas. Paga al contado 55.000 pesetas y el resto más 1.300 pesetas de recargo en 6 meses.

¿Cuánto ha de pagar cada mes?

12. Por 2 billetes de adultos y 3 billetes de niño se han pagado 2.320 pesetas. Un billete de adulto vale 160 pesetas más que uno de niño.

¿Cuál es el precio de 1 billete de adulto? ¿Y el precio de un billete de niño?

1. Semirrectas y segmentos. Mediatriz de un segmento.

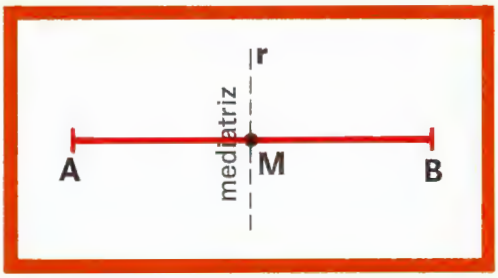


Semirrecta y segmento

Un punto **P** divide a una recta en dos partes llamadas **semirrectas opuestas.**

El punto **P** es el **origen** o **borde** de las dos semirrectas.

Dos puntos **A** y **B** de una recta determinan en ella el segmento **AB.** Los puntos **A** y **B** son los **extremos** o bordes del segmento.

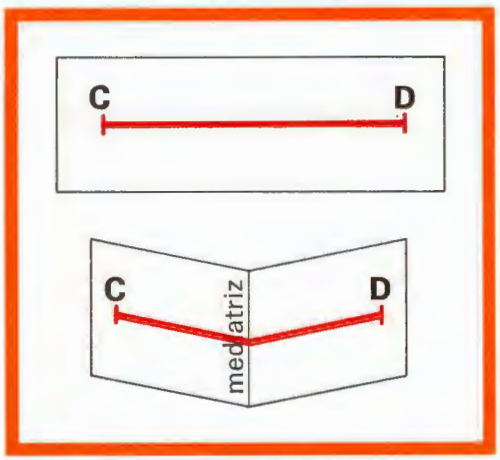


Mediatriz de un segmento

El punto **M** es el punto medio del segmento **AB.**

Por el punto **M** se ha trazado una recta perpendicular al segmento. La recta **r** es la **mediatriz** del segmento **AB.**

El segmento queda dividido en dos partes iguales.



Trazado de la mediatriz mediante plegado

Observa cómo se puede construir la mediatriz del segmento **CD.**

Se dobla el papel haciendo coincidir los extremos **C** y **D** del segmento.

El doblez del papel es la mediatriz.

Pasando el lápiz sobre el doblez queda trazada la mediatriz.

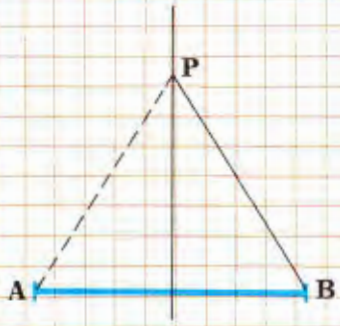
Un punto divide a una recta en dos semirrectas opuestas.
Segmento es la parte de una recta comprendida entre dos puntos.
La mediatriz de un segmento es la perpendicular en su punto medio.
La mediatriz divide al segmento en dos segmentos iguales.

1. PLIEGA Y CONSTRUYE:

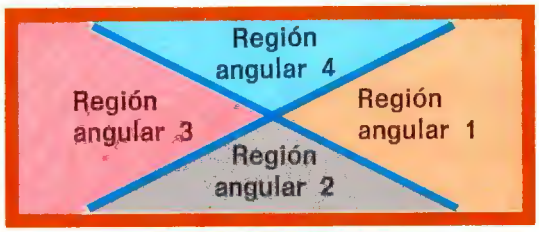
- Dibuja un segmento **AB** en una hoja de papel.
- Doblando el papel de modo que coincidan los extremos, construye la mediatriz.
- Une con la regla un punto **P** de la mediatriz con los extremos **A** y **B** del segmento.

¿Cómo son los segmentos **PA** y **PB**?

Compruébalo doblando el papel por la mediatriz.



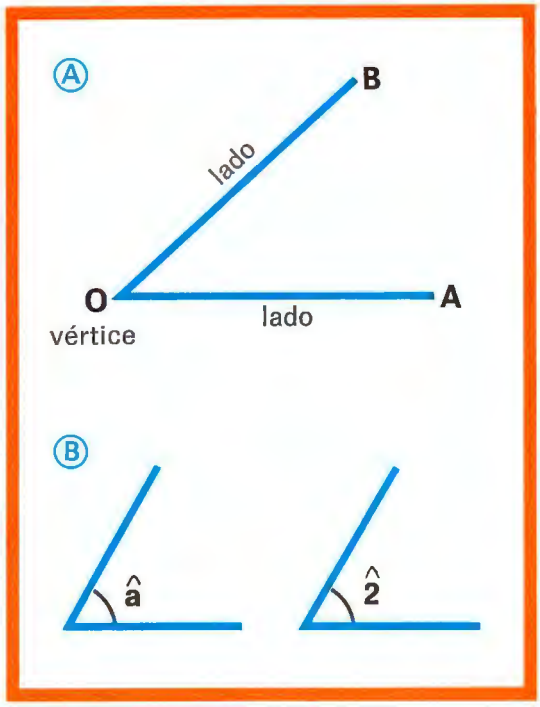
2. Ángulo. Bisectriz de un ángulo.



Ángulo

Dos rectas secantes dividen el plano en cuatro regiones angulares.

Cada una de estas regiones determina un ángulo.



Elementos y lectura de un ángulo

Observa este ángulo.

- Los **lados** son las dos semirrectas **OA** y **OB** que tienen su origen en el punto **O.**
- El **vértice** es el punto **O.**

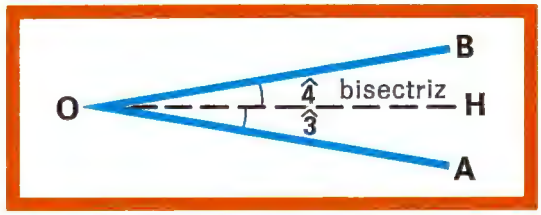
Un ángulo puede nombrarse de varias maneras:

Ⓐ **Con tres letras mayúsculas.**
Sobre ellas puede ponerse el signo ∧:

ángulo **AOB**	ángulo $\widehat{AOB}$
ángulo **BOA**	ángulo $\widehat{BOA}$

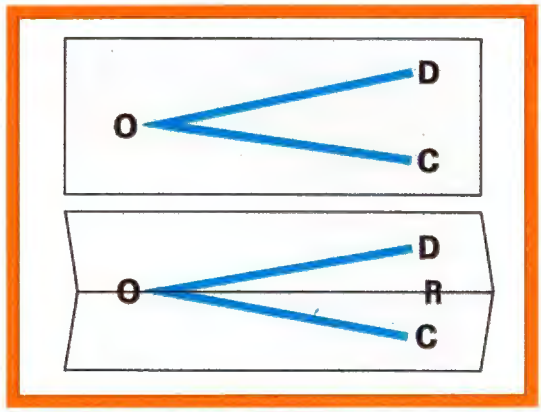
Observa que la letra del vértice siempre se nombra en medio.

Ⓑ **Con una letra minúscula o con un número:** ángulo $\hat{a}$, ángulo $\hat{2}$.



Bisectriz de un ángulo

La semirrecta **OH** divide el ángulo $\widehat{AOB}$ en dos ángulos iguales. La semirrecta **OH** se llama **bisectriz** del ángulo $\widehat{AOB}$ y lo divide en dos ángulos iguales $\hat{3}$ y $\hat{4}$.



Trazado de la bisectriz mediante plegado

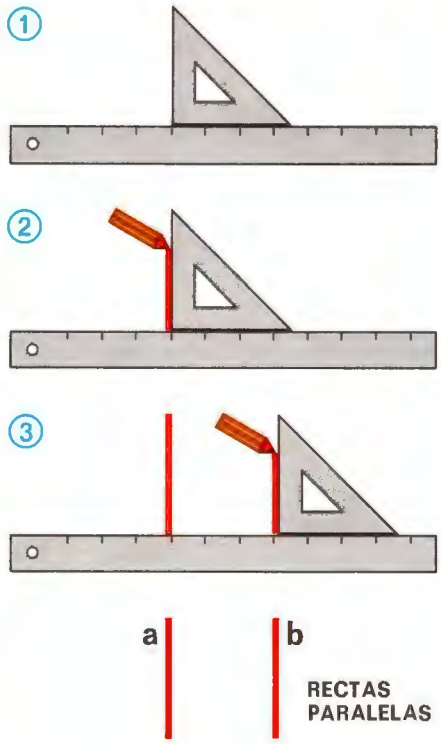
Observa cómo se puede construir la bisectriz del ángulo $\widehat{COD}$.

Se dobla el papel por el punto **O** de modo que coincidan los lados **OD** y **OC.**

Observa que el pliegue **OR** divide el ángulo en dos ángulos iguales $\widehat{COR}$ y $\widehat{ROD}$.

Bisectriz de un ángulo es la semirrecta que tiene por origen el vértice del ángulo y que divide a éste en dos ángulos iguales.

3. Trazado de rectas paralelas y de rectas perpendiculares con regla y escuadra.



Trazado de rectas paralelas

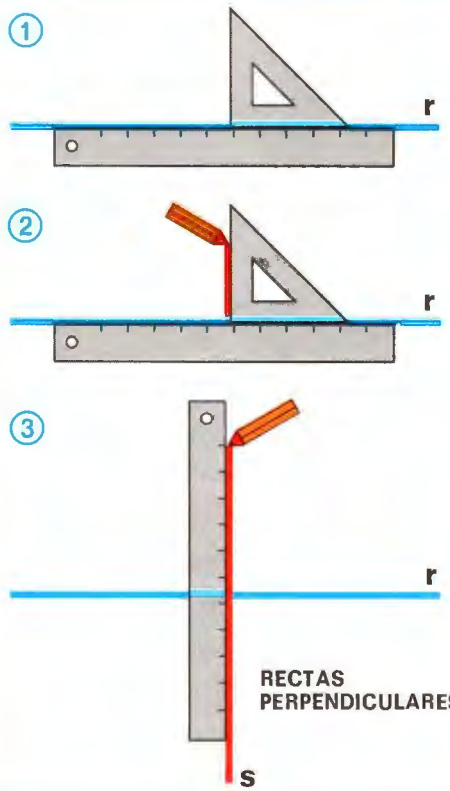
Dos rectas son paralelas cuando no tienen ningún punto común.

Observa cómo se trazan rectas paralelas con la regla y la escuadra.

1. Se coloca la escuadra sobre la regla como indica la figura.
2. Se traza una recta pasando el lápiz por el borde de la escuadra.
3. Se desliza la escuadra sobre la regla manteniendo fija la regla y se traza otra recta pasando otra vez el lápiz por el borde de la escuadra.

Así se tienen dos rectas **a** y **b** paralelas.

Este procedimiento sirve para trazar tantas rectas paralelas como se quiera.



Trazado de rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares cuando se cortan formando cuatro ángulos iguales.

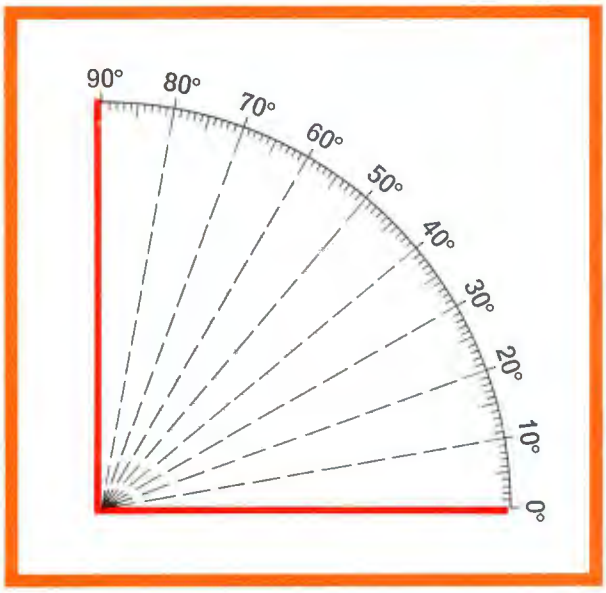
Cada uno de estos ángulos es un ángulo recto.

Observa cómo puedes trazar una perpendicular a una recta **r** con la escuadra y la regla.

1. Se colocan la regla y la escuadra como indica la figura.
2. Se traza una recta pasando el lápiz como indica la figura.
3. Con la regla se prolonga la recta que has trazado.

La recta **s** trazada es perpendicular a la recta **r**.

4. Medidas de ángulos. Grados, minutos y segundos.



El grado sexagesimal

La unidad natural para medir ángulos es el ángulo recto.

Pero el ángulo recto es una unidad demasiado grande; por eso, se usan otras unidades menores.

Una de estas unidades menores que el ángulo recto es el **grado sexagesimal.**

Observa en el dibujo un ángulo recto dividido en 90 partes iguales. Cada una de estas partes es un grado sexagesimal.

Por tanto, un ángulo recto tiene 90 grados.

Un grado sexagesimal es cada una de las partes que resultan de dividir un ángulo recto en 90 partes iguales. Un ángulo recto = 90 grados.

El minuto y el segundo

Otras unidades para medir ángulos son: el **minuto sexagesimal** y el **segundo sexagesimal.**

Entre el grado, el minuto y el segundo existen las siguientes relaciones:

1 grado = 60 minutos
1 minuto = 60 segundos

1 ángulo recto = 90°
1° = 60'
1' = 60''

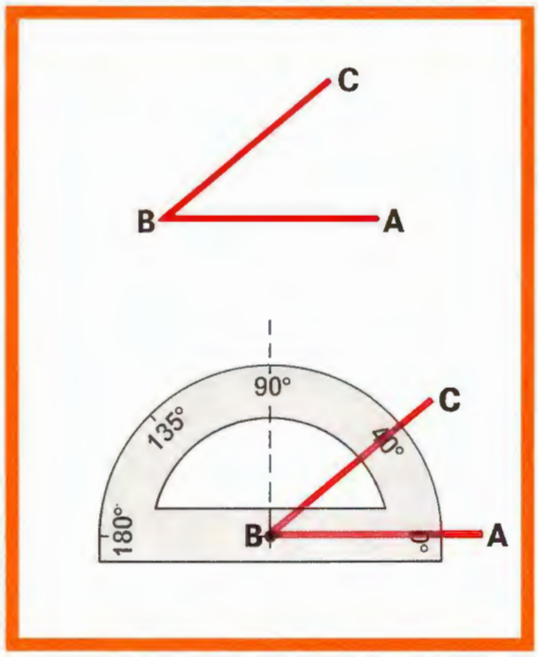
Las unidades de medida de ángulos se expresan escribiendo en la parte superior derecha del número correspondiente:

- un cero pequeño para los grados (°)
- una coma para los minutos (')
- dos comas para los segundos ('').

1. Completa:

$1° \xrightarrow{\times 60} 60'$	$1' \xrightarrow{\times 60} 60''$	$360' \xrightarrow{: 60} 6°$
$2° \xrightarrow{\times 60} 120'$	$3' \xrightarrow{\times 60} \ldots$	$480' \xrightarrow{: 60} \ldots$
$3° \xrightarrow{\times 60} \ldots$	$5' \xrightarrow{\times 60} \ldots$	$600' \xrightarrow{: 60} \ldots$
$4° \xrightarrow{\times 60} \ldots$	$7' \xrightarrow{\times 60} \ldots$	$720' \xrightarrow{: 60} \ldots$

5. Medir ángulos con el transportador graduado.



Transportador graduado. Semicírculo graduado

El transportador es un instrumento que sirve para medir y construir ángulos.

Observa cómo se mide con el transportador el ángulo agudo $\widehat{ABC}$.

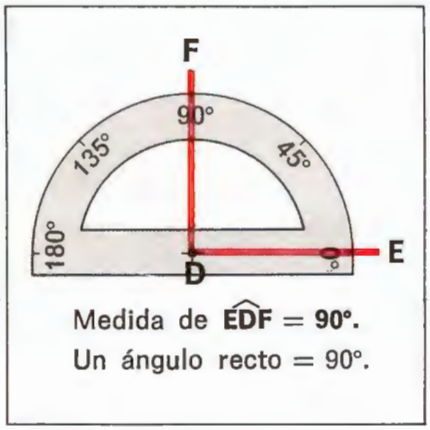
1.° Se coloca el transportador de modo que su centro coincida con el vértice **B** del ángulo y su borde recto con uno de los lados del ángulo.

2.° Se comprueba el número del transportador por el que pasa el otro lado del ángulo. Ese número es la medida del ángulo en grados.

En este caso el ángulo $\widehat{ABC}$ mide 40°:

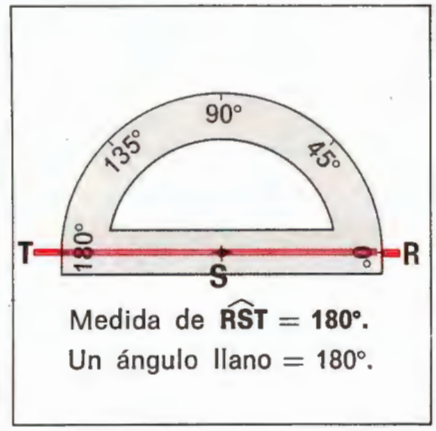
medida de $\widehat{ABC}$ = **40°**

Un ángulo agudo mide menos de 90°.

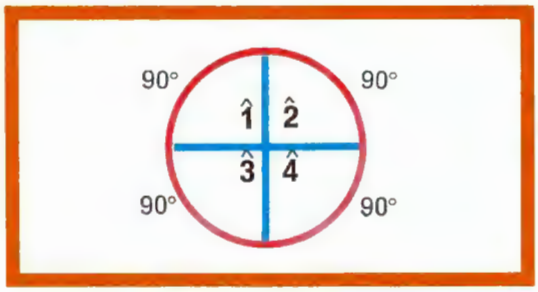


Medida de $\widehat{EDF}$ = **90°.**
Un ángulo recto = 90°.

Medida de $\widehat{MNP}$ = **135°.**
Un ángulo obtuso mide más de 90°.



Medida de $\widehat{RST}$ = **180°.**
Un ángulo llano = 180°.



Observa que la circunferencia tiene cuatro ángulos rectos; por eso tiene 4 × 90 = 360°.

Un ángulo recto mide 90°.
Un ángulo llano mide 180° o dos rectos.
Un ángulo agudo mide menos de 90°.
Un ángulo obtuso mide más de 90°.
Una circunferencia tiene 4 ángulos rectos o 360°.

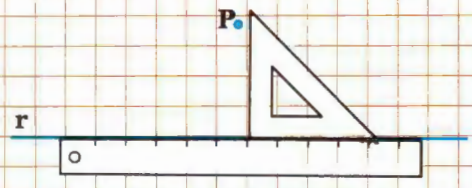
Ejercicios y problemas

1. Calca el segmento **AB** en un papel. Mediante plegado, traza la mediatriz del segmento.

2. Dibuja un ángulo en un papel. Plegando el papel, traza la bisectriz del ángulo.

3. Traza con la regla y el compás tres rectas paralelas. Traza también dos rectas perpendiculares.

4. Traza una recta **r** y un punto **P** exterior.
Traza después con la escuadra la perpendicular a la recta **r** que pasa por el punto **P**.
Coloca la regla y la escuadra como se indica en el dibujo.

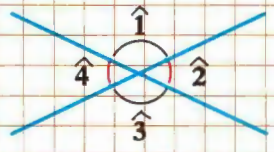


5. ¿Cuánto miden los cuatro ángulos que forman dos rectas perpendiculares?

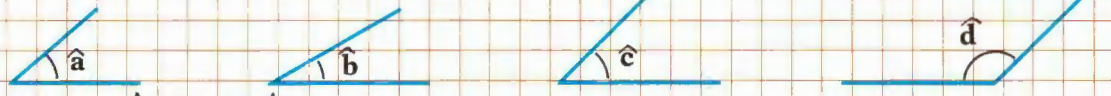
6. ¿Cómo se llaman los ángulos que miden menos de 90°? ¿Y los que miden más de 90°?

7. ¿Cuál es el ángulo que mide 180°? ¿Cuántos grados mide un ángulo recto? ¿Y minutos?

8. Mide con el transportador graduado los ángulos $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$ y $\hat{4}$.
¿Cómo son los ángulos opuestos por el vértice $\hat{1}$ y $\hat{3}$? ¿Y $\hat{2}$ y $\hat{4}$?



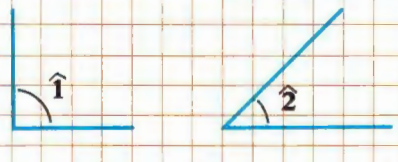
9. Mide los ángulos $\hat{a}$ y $\hat{b}$ y después los ángulos $\hat{c}$ y $\hat{d}$.



¿Cuánto mide $\hat{a}+\hat{b}$? ¿Y $\hat{c}+\hat{d}$?

10. Dibuja ángulos de 45°, 90°, 75°, 135°, 160° y 180°. Utiliza el transportador graduado.

11. Construye un ángulo que sea suma de los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{2}$.



12. Un ángulo mide 30°. Si se traza una bisectriz, ¿cuánto mide cada uno de los ángulos que se forman?

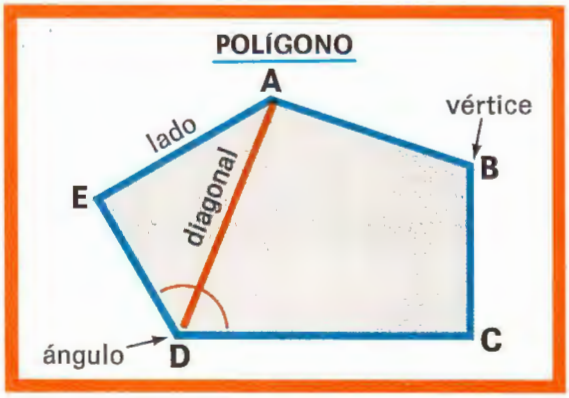
13. Calcula el complemento de un ángulo de 37° (lo que le falta para valer un recto).
Dibuja los dos ángulos.

14. Calcula el suplemento de un ángulo de 85° (lo que le falta para valer un llano).
Dibuja los dos ángulos.

15. ¿Cuántos minutos tiene un ángulo que mide 30° y 30'?

16. Un ángulo mide 2.100'. ¿Cuántos grados tiene?

1. Polígonos. Clasificación. Polígonos convexos y polígonos cóncavos.



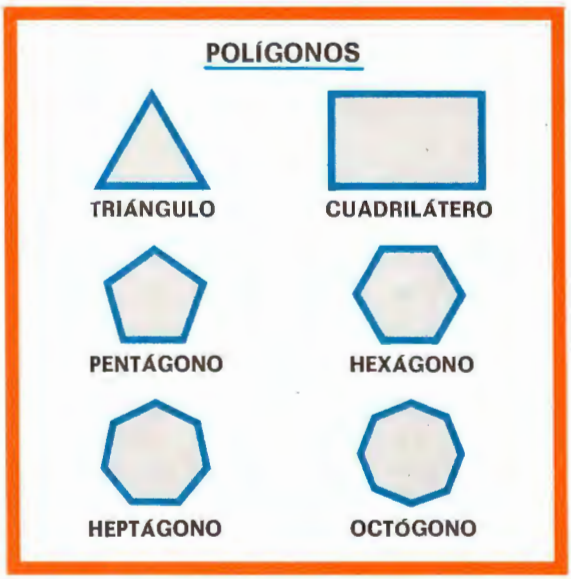
Polígono

Observa que la línea poligonal cerrada **ABCDE** se ha pintado de azul. La línea poligonal y su interior forman un **polígono.**

Los segmentos de la línea poligonal son los **lados** del polígono. El polígono de la figura tiene 5 lados, 5 vértices y 5 ángulos.

El segmento **AB,** que une dos vértices no consecutivos, es una **diagonal** del polígono.

Polígono es la parte de plano limitada por una línea poligonal cerrada.



Clasificación de los polígonos

Según el número de lados, los polígonos se clasifican en:

- **Triángulos,** si tienen 3 lados.
- **Cuadriláteros,** si tienen 4 lados.
- **Pentágonos,** si tienen 5 lados.
- **Hexágonos,** si tienen 6 lados.
- **Heptágonos,** si tienen 7 lados.
- **Octógonos,** si tienen 8 lados.
- **Eneágonos,** si tienen 9 lados.

En general, un polígono se nombra dando el número de lados: polígono de 13 lados, polígono de 17 lados, etc.

Polígonos convexos y polígonos cóncavos

Observa los polígonos ① y ②. Los dos tienen todos los ángulos convexos, o sea, menores de 180°. Por eso son polígonos convexos.

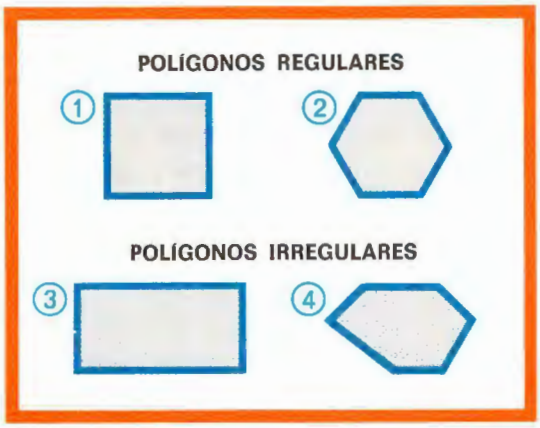
Los polígonos ③ y ④ tienen un ángulo que es cóncavo, o sea, mayor que 180°. Por eso son polígonos cóncavos.

Polígono convexo es el que tiene todos sus ángulos convexos.
Polígono cóncavo es el que tiene algún ángulo cóncavo.

1. Dibuja un hexágono convexo.
Traza sus diagonales.
¿Cuántas diagonales tiene?

2. Dibuja un pentágono convexo y un pentágono cóncavo.

2. Polígonos regulares. Construcción.



Polígono regular

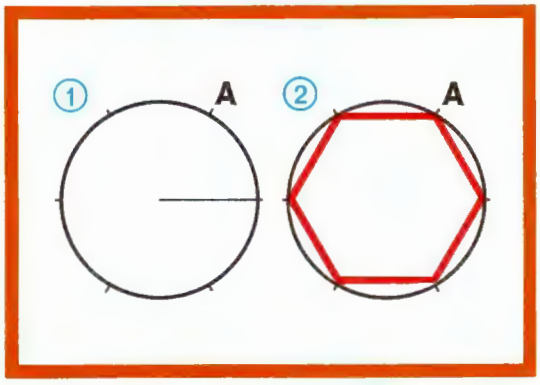
Observa que los polígonos ① y ② tienen todos sus lados y todos sus ángulos iguales.

Por eso son **polígonos regulares.**

Los polígonos ③ y ④ no tienen todos los lados iguales o no tienen todos los ángulos iguales.

Por eso son **polígonos irregulares.**

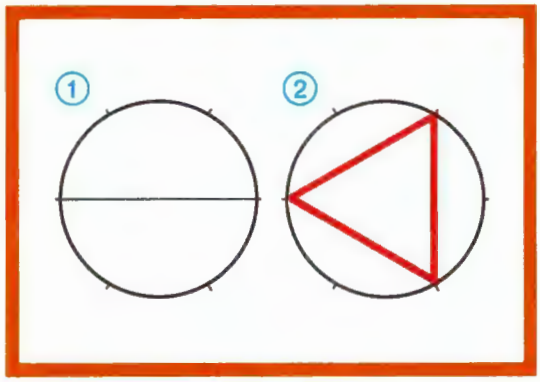
Polígono regular es el polígono que tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales.



Construcción del hexágono regular

① Se traza una circunferencia y con el mismo radio se llevan arcos iguales a partir de un punto cualquiera **A.** De este modo la circunferencia queda dividida en 6 partes iguales.

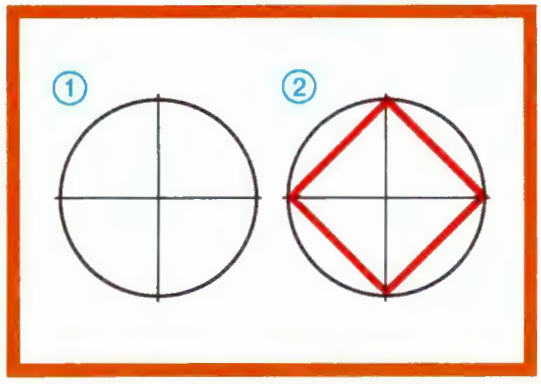
② Se trazan las cuerdas que unen cada punto marcado con el contiguo. Así queda construido el hexágono regular.



Construcción del triángulo equilátero

① Se traza una circunferencia y se divide en 6 partes iguales.

② Se unen los puntos alternos como indica la figura.

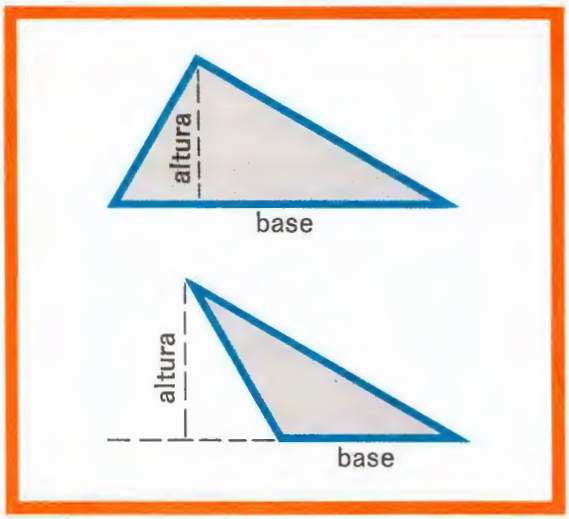


Construcción del cuadrado

① Se trazan una circunferencia y dos diámetros perpendiculares.
Así queda dividida la circunferencia en cuatro partes iguales.

② Se unen los extremos de los diámetros como indica la figura.

3. Clases de triángulos según sus lados. Construcción gráfica de un triángulo conociendo sus lados.



Triángulo: base y altura

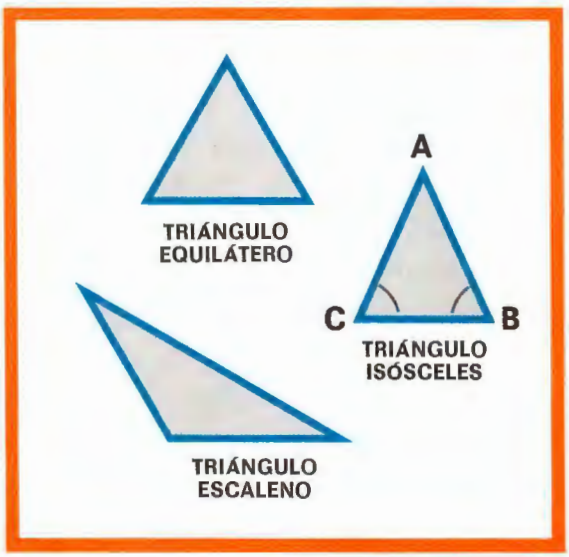
Un triángulo es el polígono que tiene tres lados.

No hay ningún polígono que tenga dos lados. Por eso el triángulo es el polígono de menor número de lados.

Base de un triángulo es uno cualquiera de los lados.

Altura de un triángulo es el segmento perpendicular a la base o a su prolongación, trazado desde el vértice opuesto.

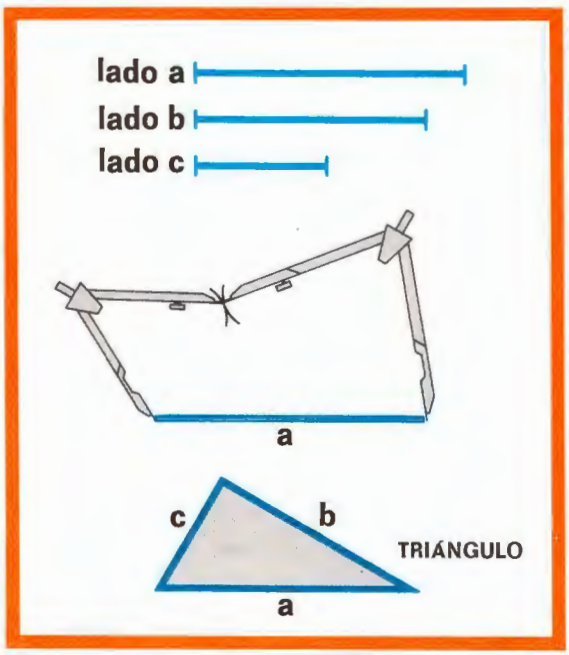
Un triángulo tiene tres bases y tres alturas.



Clases de triángulos según sus lados

Los triángulos, según sus lados, pueden ser:

- **Triángulo equilátero** es el que tiene los tres lados iguales. También tiene los tres ángulos iguales. Por eso es un polígono regular.
- **Triángulo isósceles** es el que tiene dos lados iguales. Los ángulos opuestos a los lados iguales también son iguales: $\hat{B} = \hat{C}$.
- **Triángulo escaleno** es el que tiene los tres lados desiguales. También tiene los tres ángulos desiguales.



Construcción de un triángulo conociendo sus lados

Sean los tres lados **a, b** y **c.**

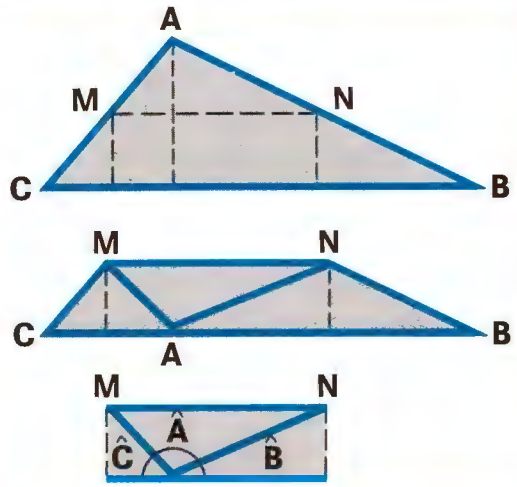
1.° Se traza uno cualquiera de los lados, por ejemplo el lado **a.**

2.° Se abre el compás una distancia igual al lado **b** y con centro en uno de los extremos del segmento **a** se traza un arco de circunferencia.

3.° Se coloca la punta del compás en el otro extremo del lado **a** y se traza otro arco con radio igual al lado **c.**

4.° El punto de intersección de los dos arcos es el tercer vértice del triángulo.

4. Suma de los ángulos de un triángulo. Clases de triángulos según sus ángulos.



Suma de los ángulos de un triángulo

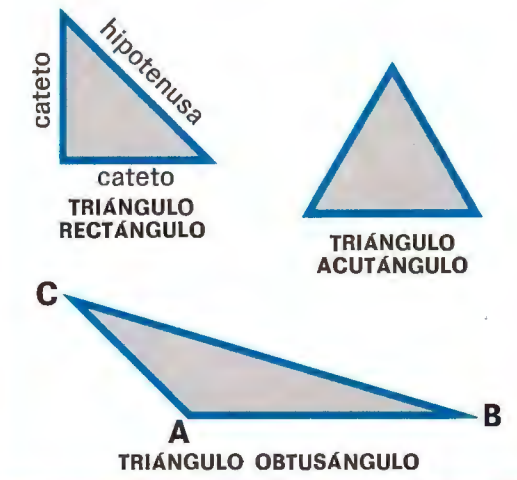
Observa el triángulo **ABC.**

El punto **M** es el punto medio del lado **AC,** y **N** es el punto medio del lado **AB.**

Si doblas el papel por el segmento **MN** y después por las líneas de puntos observarás que los tres ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ coinciden y forman un ángulo llano.

Por eso la suma de los tres ángulos de un triángulo es un llano o 180°.

La suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano o 180°.



Clases de triángulos según sus ángulos

- **Triángulo rectángulo** es el que tiene un ángulo recto.

  Los lados menores que forman el ángulo recto se llaman **catetos,** y el lado que es el mayor, opuesto al ángulo recto, se llama **hipotenusa.**

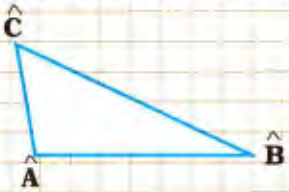
- **Triángulo obtusángulo** es el que tiene un ángulo obtuso.

  El mayor lado del triángulo obtusángulo es el lado opuesto al ángulo obtuso.

- **Triángulo acutángulo** es el que tiene sus tres ángulos agudos.

1. Resuelve:

En el triángulo **ABC:** $\hat{A} = 100°$ y $\hat{B} = 25°$.



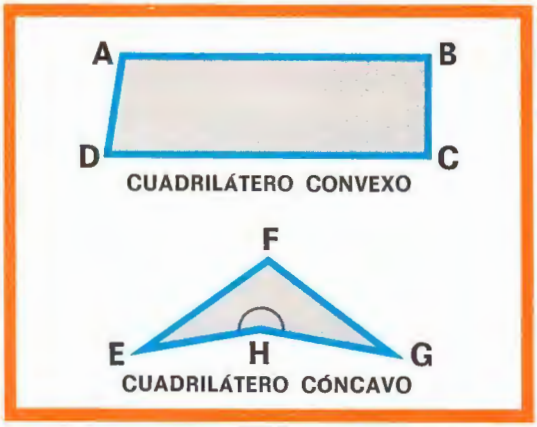
¿Cuánto mide el ángulo **C**?

Recuerda que la suma de los tres ángulos es 180°.

2. Responde:

- ¿Puede tener un triángulo dos ángulos obtusos? ¿Por qué?
- ¿Puede tener un triángulo dos ángulos rectos? ¿Por qué?
- En un triángulo rectángulo, ¿cuánto miden entre los dos ángulos agudos?

5. Cuadriláteros. Clasificación.



Cuadriláteros

Cuadriláteros son los polígonos de cuatro lados.

Observa que el cuadrilátero **ABCD** tiene todos sus ángulos convexos, o sea, menores que 180°. Es un **cuadrilátero convexo.**

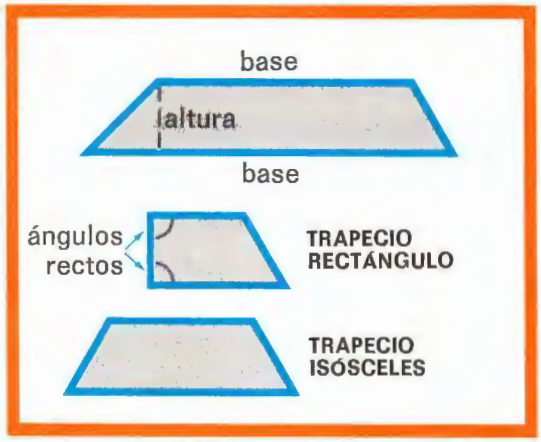
El cuadrilátero **EFGH** tiene el ángulo $\hat{H}$ que es cóncavo, o sea, mayor que 180°. Es un **cuadrilátero cóncavo.**

De ahora en adelante nos referiremos sólo a los cuadriláteros convexos.

Clasificación de los cuadriláteros

Los cuadriláteros convexos se clasifican en trapezoides, trapecios y paralelogramos.

- **Trapezoides** son los cuadriláteros que no tienen lados paralelos.
- **Trapecios** son los cuadriláteros que tienen dos lados paralelos.
  Bases de un trapecio son los dos lados paralelos.
  Altura del trapecio es la distancia entre las bases.
- **Paralelogramos** son los trapecios que tienen los lados paralelos dos a dos.



Clases de trapecios

Además de los paralelogramos, otros tipos de trapecios son: el trapecio rectángulo y el trapecio isósceles.

El **trapecio rectángulo** es el que tiene dos ángulos rectos.

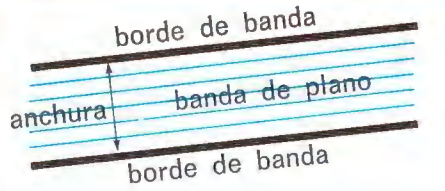
El **trapecio isósceles** es el que tiene los lados no paralelos iguales.

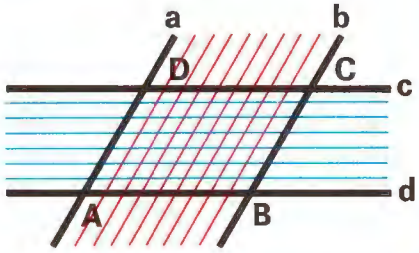
1. Dibuja un trapecio.
Señala las bases y la altura.

2. Dibuja un trapecio y un trapezoide.
¿En qué se parecen? ¿En qué se diferencian?

3. Resuelve:
Si en un cuadrilátero trazas una diagonal, queda dividido en dos triángulos.
Teniendo en cuenta que cada triángulo tiene 180°, ¿cuántos grados suman los ángulos de un cuadrilátero?

6. Paralelogramos. Clasificación.





Paralelogramos

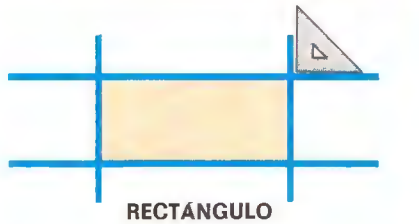
Dos rectas paralelas **a** y **b** determinan una banda de plano. Las rectas **a** y **b** son los **bordes de la banda,** y la distancia entre las dos rectas es la **anchura de la banda.**

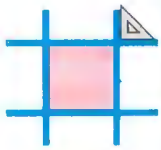
En la figura hay dos bandas que se cortan:

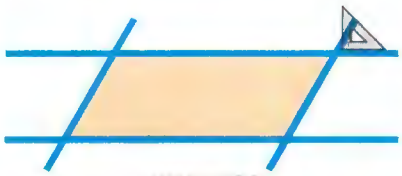
- La banda que tiene por bordes las paralelas **a** y **b**.
- La banda que tiene por bordes las paralelas **c** y **d**.

La intersección de las dos bandas determina el paralelogramo **ABCD.**

Un paralelogramo es la intersección de dos bandas de plano.





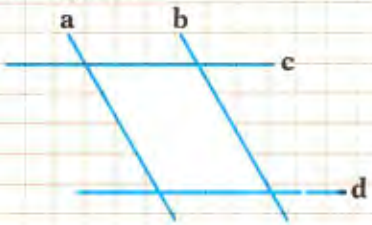


Clases de paralelogramos

Según que las bandas sean o no perpendiculares y según que tengan o no la misma anchura resultan los siguientes paralelogramos:

- El **rectángulo,** que es la intersección de dos bandas perpendiculares.
- El **cuadrado,** que es la intersección de dos bandas perpendiculares de la misma anchura.
- El **rombo,** que es la intersección de dos bandas de la misma anchura.
- El **romboide,** que es la intersección de dos bandas no perpendiculares y de distinta anchura.

1. Observa esta figura:



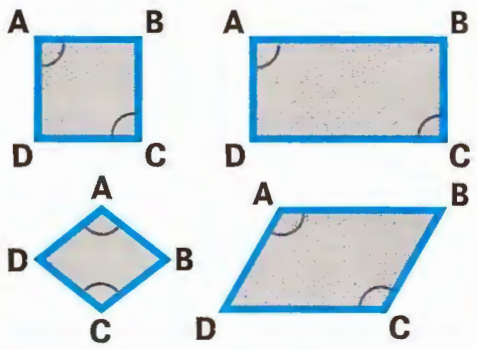
Mediante la escuadra, averigua si estas bandas que se cortan son o no perpendiculares.

¿Tienen la misma anchura?

¿Cuáles son los bordes de las bandas?

¿Qué paralelogramo se forma?

7. Paralelogramos. Propiedades.



En todos ellos, $\hat{A}$ y $\hat{C}$ son ángulos opuestos.

Propiedades generales de los paralelogramos

Observa de nuevo los cuatro paralelogramos.

Todos ellos tienen:

- los lados, paralelos dos a dos;
- sus lados opuestos, iguales;
- sus ángulos opuestos, iguales.

Cada uno de los paralelogramos tiene las características que se indican a continuación.

Propiedades del cuadrado

El cuadrado tiene:

- cuatro lados iguales,
- cuatro ángulos rectos,
- las diagonales iguales y perpendiculares.

Propiedades del rectángulo

El rectángulo tiene:

- cuatro ángulos rectos,
- las diagonales iguales.

Propiedades del rombo

El rombo tiene:

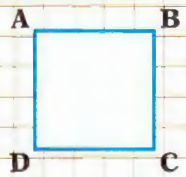
- cuatro lados iguales,
- las diagonales perpendiculares.

Propiedades del romboide

El romboide tiene:

- las diagonales desiguales y oblicuas.

1. Observa la figura:



Traza la diagonal **AC** en el cuadrado.

¿Cómo se llaman los triángulos que se forman según sus lados?

¿Y según sus ángulos?

2. RECORTA Y PLIEGA:

- Recorta cuatro tiras de cartón rígido y haz orificios en los extremos.
- Une estos extremos.

Así formas una figura que en unos momentos será un rombo y en otros un cuadrado.

Según esta experiencia, ¿qué diferencias hay entre un rombo y un cuadrado?

Ejercicios y problemas

1. Dibuja un hexágono regular, un triángulo equilátero y un cuadrado partiendo de la división de la circunferencia.

2. Dibuja las distintas clases de triángulos según sus lados y escribe sus nombres.

3. Dibuja un triángulo equilátero y traza sus tres alturas.

4. Dibuja un triángulo que sea rectángulo e isósceles a la vez.

5. Dibuja un triángulo obtusángulo e isósceles.

6. ¿Cuántos grados suman los tres ángulos de un triángulo?

7. Si en un triángulo **ABC**, $\hat{A} = 80°$ y $\hat{B} = 60°$, ¿cuánto mide el ángulo $\hat{C}$?

8. ¿Pueden ser ángulos de un triángulo los siguientes?

   $\hat{A} = 60°$ $\quad$ $\hat{B} = 70°$ $\quad$ $\hat{C} = 40°$

9. En un triángulo rectángulo uno de los ángulos mide 30°.
   ¿Cuánto miden los otros ángulos del triángulo?

10. Traza las flechas según corresponde.

Cuadrado	**Ángulos rectos**
Rectángulo	**Lados iguales**
Rombo	**Diagonales perpendiculares**
Romboide	

¿En qué se parecen y en qué se diferencian un cuadrado y un rectángulo?

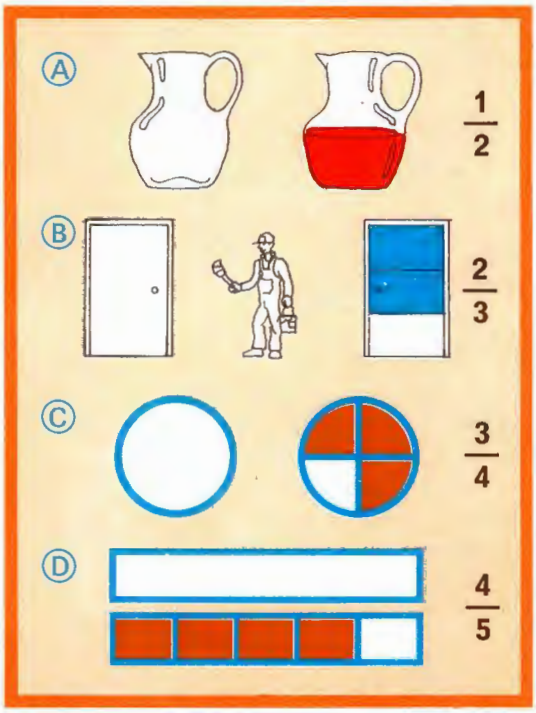
11. Recuerda que el perímetro de un polígono se obtiene sumando las longitudes de sus lados.
    Calcula el perímetro:
    a) De un cuadrado cuyo lado mide 8,2 cm.
    b) De un rombo cuyo lado mide 32,5 cm.

12. El perímetro de un cuadrado mide 72 cm. ¿Cuánto mide cada lado?

13. El perímetro de un trapecio isósceles es 28 cm.
    ¿Cuánto mide cada uno de los lados no paralelos si las bases miden 6 cm y 12 cm?

14. Éstas son las diagonales de un rombo. Dibújalo.

1. Fracción. Términos.



Fracciones

Observa estos dibujos.

Ⓐ La mitad de la jarra está llena de zumo.

Se escribe $\frac{1}{2}$ y se lee **un medio.**

Ⓑ De las tres partes de la puerta, el pintor ha pintado dos partes o dos tercios.

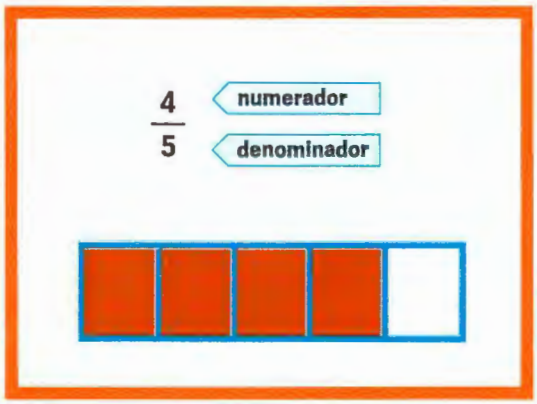
Se escribe $\frac{2}{3}$ y se lee **dos tercios.**

Ⓒ Se han pintado tres partes de las cuatro en que está dividido el círculo.

Se escribe $\frac{3}{4}$ y se lee **tres cuartos.**

Ⓓ Se han coloreado cuatro partes de las cinco en que está dividido el rectángulo.

Se escribe $\frac{4}{5}$ y se lee **cuatro quintos.**



Términos de una fracción

En toda fracción el número que indica las partes que se toman se llama **numerador.**

El número que indica las partes en que se ha dividido la unidad se llama **denominador.**

Así, el rectángulo se ha dividido en cinco partes iguales. **5** es el denominador de la fracción.

De esas cinco partes, se han rayado cuatro. **4** es el numerador de la fracción.

Lectura de fracciones

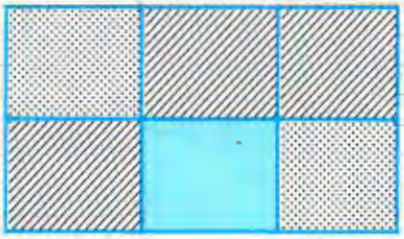
Observa cómo se leen las fracciones:

$\frac{5}{6}$ cinco sextos	$\frac{5}{9}$ cinco novenos	$\frac{8}{11}$ ocho onceavos
$\frac{6}{7}$ seis séptimos	$\frac{7}{10}$ siete décimos o siete décimas	$\frac{6}{12}$ seis doceavos
$\frac{3}{8}$ tres octavos		$\frac{3}{13}$ tres treceavos

Fracción es una o varias partes iguales en que se divide la unidad.
Los términos de una fracción son dos: numerador y denominador.
El denominador indica las partes en que se divide la unidad.
El numerador indica las partes que se toman o que se consideran.

Actividades

1. Observa el rectángulo y contesta:



¿Qué fracción del rectángulo

a) está rayada?

b) está punteada?

c) es azul?

d) no está rayada?

e) no es azul?

2. Observa el círculo y escribe la fracción de círculo

a) que es azul.

b) que es gris.

c) que es roja.

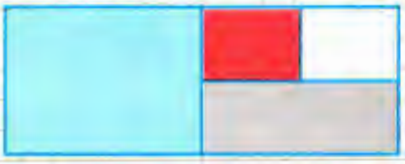
d) que no es azul.

e) que no es blanca.

f) que no es roja.

g) que es azul o gris.

3. Observa el rectángulo y escribe la fracción del mismo



a) que es azul.

b) que es gris.

c) que es roja.

d) que es blanca.

e) que no es roja.

f) que no es gris.

g) que no es azul.

h) que no es blanca.

4. Raya en cada figura la fracción de la misma que se indica:

$\frac{3}{4}$

$\frac{5}{6}$

$\frac{7}{8}$

$\frac{5}{12}$

5. Observa las figuras y contesta:

¿Hay coloreados de rojo $\frac{2}{4}$ del rectángulo?

¿Hay coloreado de azul $\frac{1}{4}$ del cuadrado?

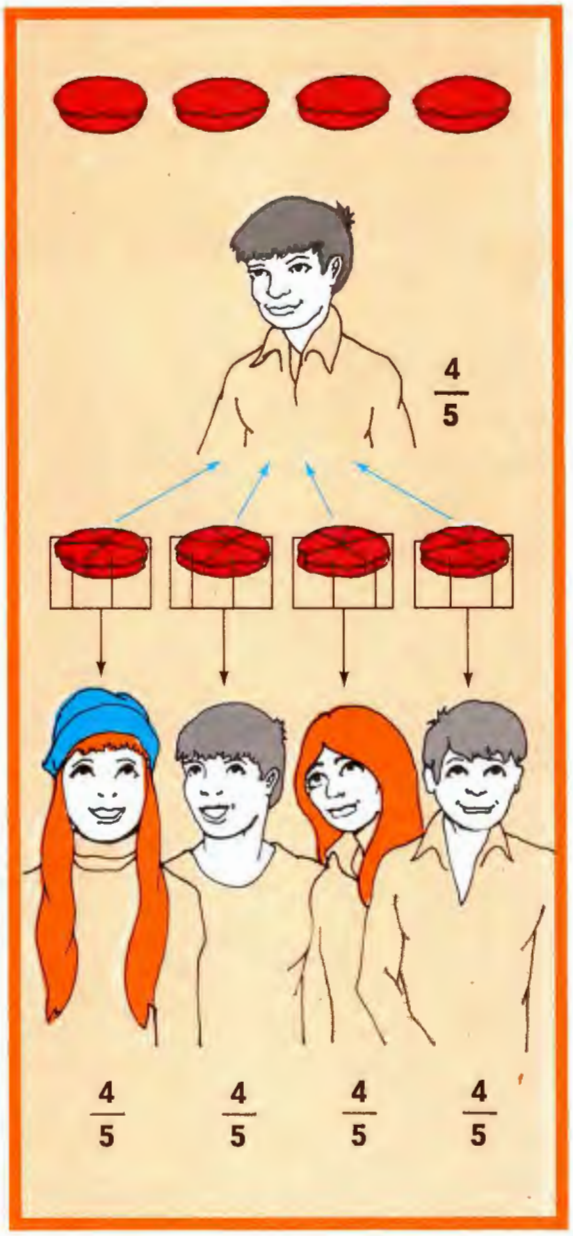
6. Resuelve este problema:

Antonio ha dividido un pastel en seis partes, como indica la figura, y se piensa comer la parte que tiene la cucharilla.

¿Es cierto que Antonio se comerá $\frac{1}{6}$ del pastel?

Explica tu respuesta.

2. La fracción como cociente exacto de dos números.



La fracción como cociente

Se quiere repartir 4 tartas entre 5 niños.

¿Cuánto corresponde a cada uno?

La división entera $\begin{array}{r|l} 4 & 5 \\ \hline 4 & 0 \end{array}$ indica que con los números naturales no es posible hacer este reparto.

Veamos cómo las fracciones sí nos permiten hacer este reparto.

Para ello se divide cada pastel en 5 partes iguales, es decir, en **quintos.**

Después se reparten las $4 \times 5 = 20$ partes iguales entre los 5 niños.

A cada niño corresponde $\frac{4}{5}$ de tarta.

Se ha dividido 4 entre 5 y el cociente exacto ha sido $\frac{4}{5}$.

Acabamos de ver que una fracción es el cociente exacto de dos números.

Como las divisiones 4 : 0 y 5 : 0 no tienen sentido, porque no se puede dividir por 0, resulta que las expresiones $\frac{4}{0}$ y $\frac{5}{0}$ no son fracciones.

Una fracción se puede considerar como el cociente exacto de dividir el numerador entre el denominador.

El denominador de una fracción ha de ser un número distinto de cero.

1. Lee y contesta:

Queremos repartir 3 naranjas entre 4 niños. Si cada naranja tiene cuatro cuartos, ¿cuánto corresponde a cada uno?

2. Escribe en forma de fracción:

7 : 1 5 : 13 9 : 17 3 : 7 3 : 4

3. Contesta:

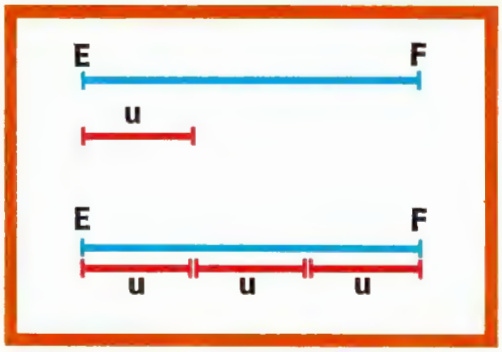
Se reparte en partes iguales una jarra de leche entre 3 niños.

¿Cuánto corresponde a cada uno?

4. Rodea los cocientes que no son fracciones:

7 : 8 6 : 0 3 : 0 5 : 9

3. La fracción como resultado de una medida.

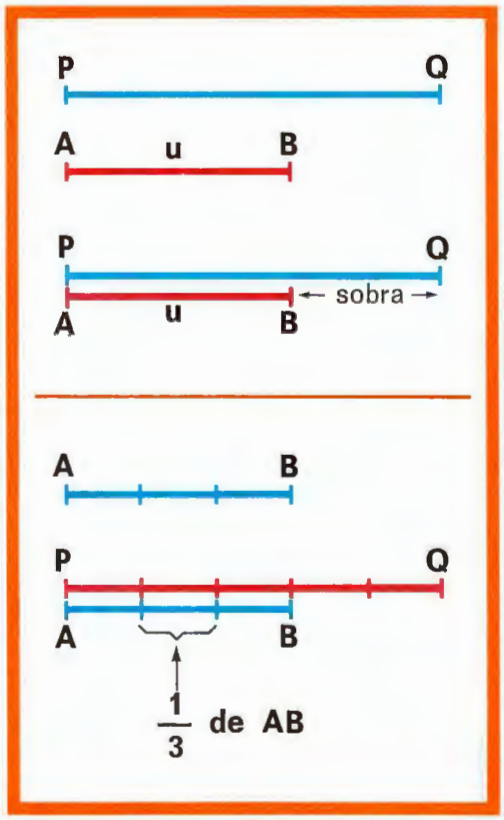


Observa el segmento **EF** y el segmento **u**.

Medir el segmento **EF** tomando como unidad el segmento **u** significa averiguar las veces que se puede llevar el segundo sobre el primero.

Como el segmento **u** se puede llevar tres veces sobre el segmento **EF**, la medida del segmento **EF** con la unidad **u** es **3**.

Medida de **EF** = **3 u.**



No siempre es posible llevar el segmento unidad un número exacto de veces sobre otro segmento.

Por ejemplo, si tratamos de medir el segmento **PQ** tomando como unidad el segmento **AB**, se observa que el segmento **AB** se puede llevar una vez sobre el segmento **PQ** y sobra un trozo.

Para encontrar la medida del segmento **PQ** dividimos el segmento **AB** en tres partes iguales.

Cada una es $\frac{1}{3}$ de la unidad **AB**.

Observa que el segmento **PQ** mide cinco de estas partes. Podemos decir que la medida del segmento **PQ** tomando como unidad el segmento **AB** es $\frac{5}{3}$.

La fracción $\frac{5}{3}$ representa la medida exacta del segmento **PQ.** El **3** indica las partes iguales en que se divide la unidad **AB** y el **5** indica el número de veces que el segmento **PQ** contiene a una de estas partes.

Una fracción representa la medida de una cantidad.
El denominador indica las partes iguales en que se divide la unidad de medida.
El numerador indica las partes que contiene la cantidad medida.

1. Observa los segmentos HR y ST y contesta:

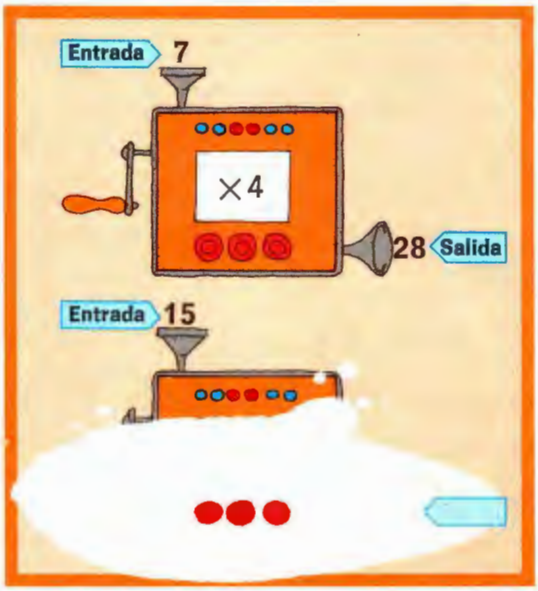
Si tomamos como unidad el segmento **ST**, ¿en cuántas partes se ha dividido la unidad **ST**?

¿Cuál es la medida del segmento **HR** tomando el segmento **ST** como unidad?

2. Contesta a estas preguntas:

Si se toma como unidad el segmento **AB**, ¿qué fracción indica la medida del segmento **CD**? ¿Y la del segmento **MN**?

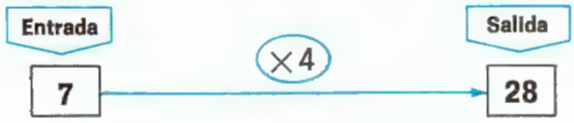
4. Operadores. Cadena de operadores.



Operadores

Consideremos el operador (×4). Este operador actúa sobre los números multiplicándolos por 4.

Es como una máquina que transforma cada número en su cuádruplo.



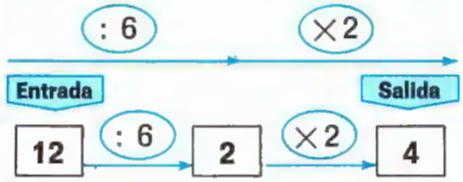
Del mismo modo, el operador 3 actúa sobre los números dividiéndolos por 3.

Cadena (a)

Multiplica por 4 y divide por 2

Cadena (b)

Divide por 6 y multiplica por 2



Cadena de operadores

Los operadores, como las máquinas, pueden actuar sucesivamente, de modo que lo que sale de un operador entra en otro.

Así se forma una **cadena de operadores.**

Observa que la cadena (a) actúa multiplicando por 4 y dividiendo por 2.

La cadena (b) actúa dividiendo por 6 y multiplicando por 2.

1. Completa los números que resultan al aplicar estas cadenas:

Cadena 1

Multiplica por 3 y divide por 6.

8	24	4
6		
18		

Cadena 2

Multiplica por 5 y divide por 10.

2	10	1
4		
8		

5. Las fracciones como operadores.

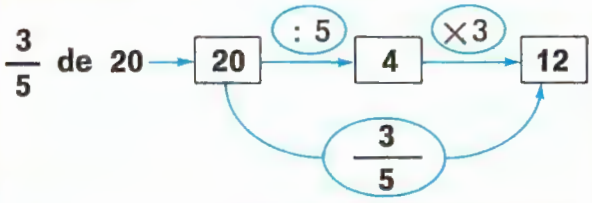
Cadena (a) actuando sobre el 10

Cadena (b) actuando sobre el 10

Observa estas cadenas.

Las dos cadenas (a) : 5 → ×3 → y (b) ×3 → : 5 → son equivalentes

Cada una de ellas es un **operador fraccionario** o **fracción** y se representa por $\frac{3}{5}$.

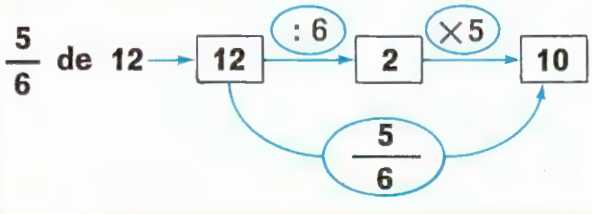


El operador $\frac{3}{5}$ actúa sobre un número o cantidad haciendo dos cosas:

1.ª Divide por 5.

2.ª Multiplica por 3.

$$\frac{3}{5} \text{ de } 20 = \mathbf{12}$$



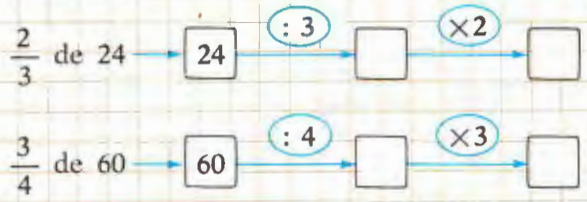
Análogamente la fracción $\frac{5}{6}$ actúa sobre el número 12

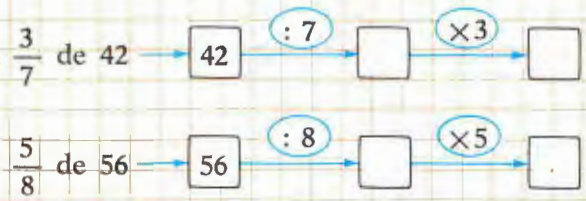
$$\frac{5}{6} \text{ de } 12 = \mathbf{10}$$

Una fracción se puede considerar como un operador que actúa sobre los números o sobre las cantidades y hace dos cosas: divide por el denominador y multiplica por el numerador.

La fracción de un número se halla dividiendo el número por el denominador y multiplicando el resultado por el numerador.

1. Completa:



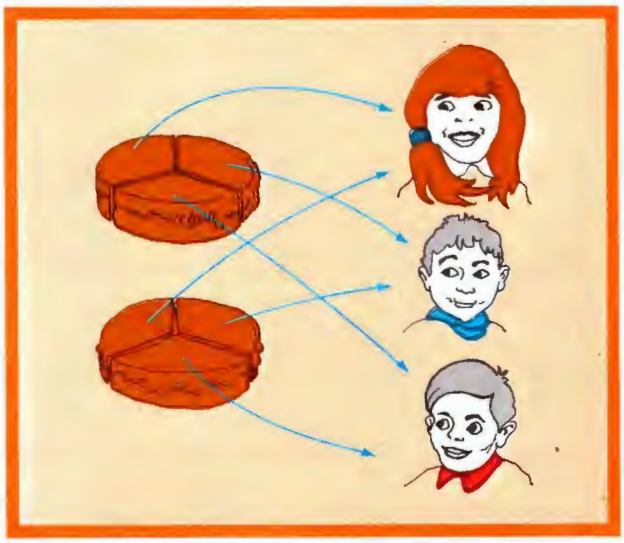


2. Completa:

$\frac{2}{3}$ de 60 { 60 : 3 = 20 ; 20 × 2 = 40 } $\frac{2}{3}$ de 60 = **40**

$\frac{2}{3}$ de 18 { 18 : ... = ... ; ... × 2 = ... } $\frac{2}{3}$ de 18 = ...

6. Diversas interpretaciones de una fracción.



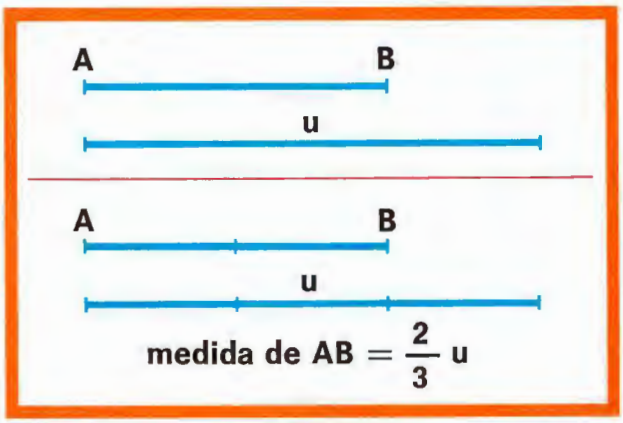
La fracción como cociente

La fracción $\frac{2}{3}$ se puede interpretar como el cociente **2 : 3.**

EJEMPLO:

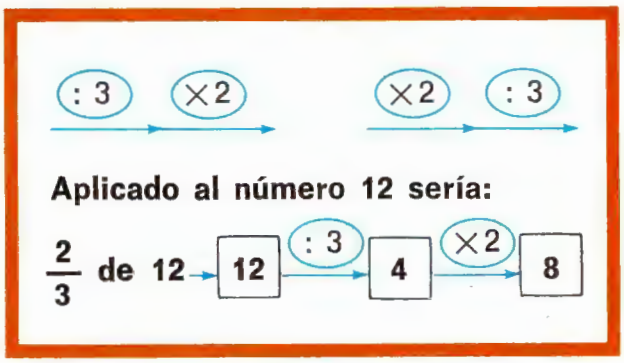
Si se quiere dividir 2 pasteles en partes iguales entre 3 niños, cada uno recibirá $\frac{2}{3}$ de pastel.

La fracción $\frac{2}{3}$ es el cociente exacto de dividir 2 por 3.



La fracción como resultado de una medida

La fracción $\frac{2}{3}$ se puede interpretar como el resultado de una medida. Decir que la medida de un segmento **AB** con la unidad de medida **u** es $\frac{2}{3}$ significa que la unidad **u** se ha dividido en tres partes iguales y que el segmento **AB** mide dos de estas partes.

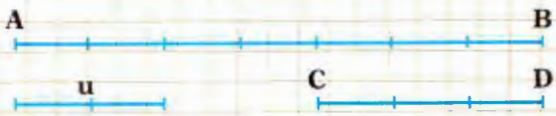


La fracción como operador

La fracción $\frac{2}{3}$ se puede interpretar como un operador que divide por 3 y multiplica por 2; es decir, el operador $\frac{2}{3}$ es equivalente a cualquiera de estas cadenas.

Observa cómo se aplica al número 12.

1. Observa y contesta:



¿Cuál es la medida del segmento **AB** tomando el segmento **u** como unidad?

¿Cuál es la medida del segmento **AB** si tomamos el segmento **CD** como unidad?

2. Lee y contesta:

Se reparten 3 pasteles entre 4 niños.

¿Cuántos pasteles tocan a cada uno?

3. Resuelve:

a) $\frac{3}{4}$ de 100

b) $\frac{4}{9}$ de 72

Ejercicios y problemas

1. Juan dice que ha coloreado los $\frac{2}{5}$ de un rectángulo.

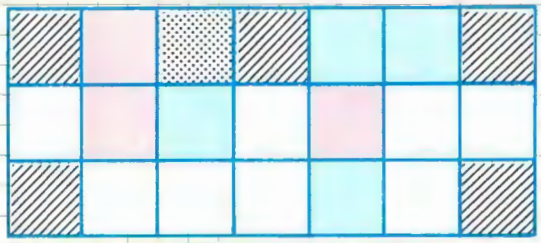
¿Qué indica el denominador 5?

¿Qué indica el numerador 3?

2. Escribe las siguientes fracciones:

a) ocho quintos
b) nueve séptimos
c) siete onceavos
d) doce diecisieteavos
e) tres veinteavos
f) seis veinticincoavos

3. Observa la figura y contesta:



¿Qué fracción del rectángulo representa

a) la parte rayada?
b) la parte punteada?
c) la parte roja?
d) la parte azul?
e) la parte blanca?
f) la parte no azul?
g) la parte no blanca?

4. Escribe en forma de fracción las siguientes divisiones:

3 : 4 5 : 9 8 : 17 4 : 13 17 : 20

Escribe también cómo se leen las fracciones anteriores.

5. Indica cuáles de las siguientes expresiones no son fracciones:

$\frac{0}{5}$ $\frac{3}{0}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{0}{6}$ $\frac{7}{0}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{7}{8}$

6. De una pieza de tela de 48 metros se cortan $\frac{3}{4}$.

¿Cuántos metros mide el trozo restante?

7. Calcula:

a) $\frac{2}{5}$ de 80 d) $\frac{5}{6}$ de 42 g) $\frac{7}{6}$ de 12

b) $\frac{2}{7}$ de 343 e) $\frac{4}{3}$ de 18 h) $\frac{5}{4}$ de 60

c) $\frac{4}{9}$ de 36 f) $\frac{7}{8}$ de 40

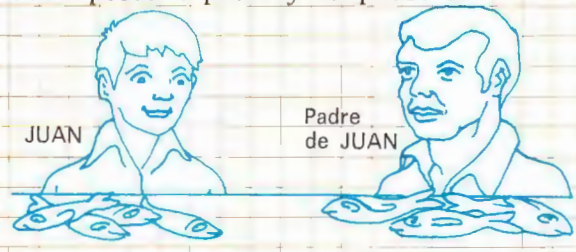
8. Un metro de tela se quiere dividir en 4 partes iguales.

¿Cuánto mide cada parte?

9. Luis ha recorrido la mitad del camino de su casa al colegio. Le faltan todavía 250 metros.

¿Qué longitud hay de su casa al colegio?

10. Juan y su padre fueron a pescar. Juan pescó 4 peces y su padre 3.



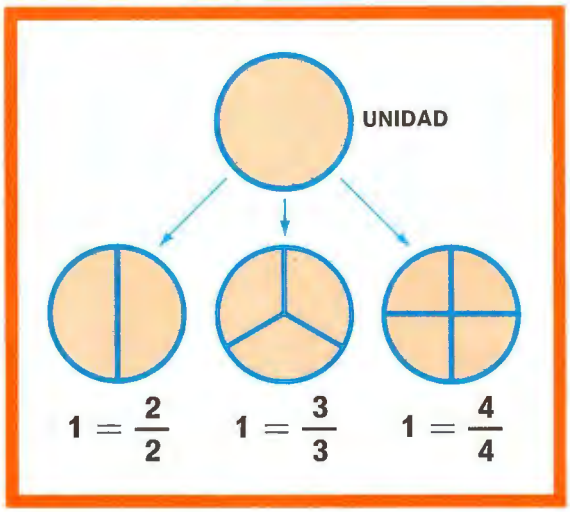
Indica las afirmaciones que son ciertas y las que son falsas.

- Juan pescó los $\frac{4}{7}$ de los peces que había.
- Juan pescó los $\frac{4}{7}$ del total de peces que pescaron él y su padre.
- El peso de los peces de Juan es los $\frac{4}{7}$ del peso de los peces que pescaron él y su padre.
- El padre de Juan pescó los $\frac{3}{7}$ de los peces que pescaron él y su hijo.

11. Antonio se gastó $\frac{2}{6}$ de 300 pesetas.

¿Cuánto se gastó Antonio?

1. Comparación de fracciones con la unidad.

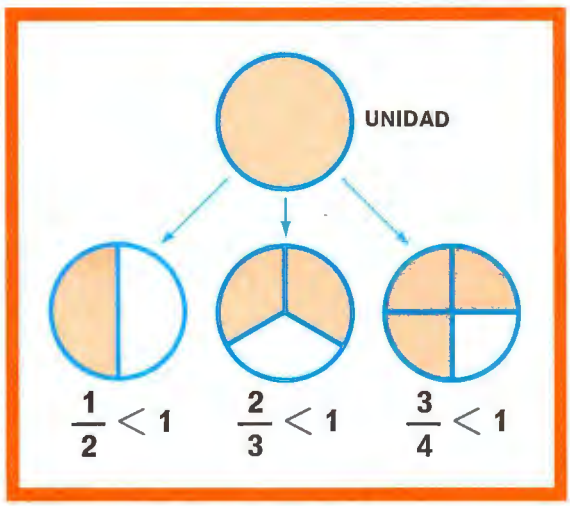


Fracciones que valen la unidad

Observa las figuras.

- En 1 unidad hay **dos medios:** $1 = \frac{2}{2}$.
- En 1 unidad hay **tres tercios:** $1 = \frac{3}{3}$.
- En 1 unidad hay **cuatro cuartos:** $1 = \frac{4}{4}$.

Observa que las fracciones $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$ y $\frac{4}{4}$ tienen iguales el numerador y el denominador y cada una de ellas vale una unidad.

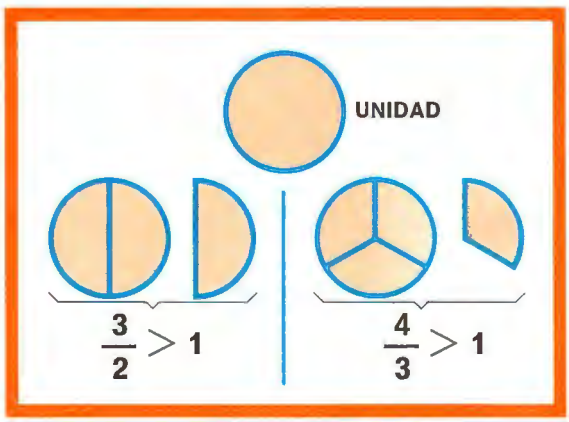


Fracciones menores que la unidad

Observa las figuras.

- $\frac{1}{2}$ es **menor** que 1 unidad: $\frac{1}{2} < 1$.
- $\frac{2}{3}$ es **menor** que 1 unidad: $\frac{2}{3} < 1$.
- $\frac{3}{4}$ es **menor** que 1 unidad: $\frac{3}{4} < 1$.

Observa que las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ tienen el numerador menor que el denominador y que todas son menores que la unidad.



Fracciones mayores que la unidad

Observa las figuras.

- $\frac{3}{2}$ es **mayor** que 1 unidad: $\frac{3}{2} > 1$.
- $\frac{4}{3}$ es **mayor** que 1 unidad: $\frac{4}{3} > 1$.

Observa que las fracciones $\frac{3}{2}$ y $\frac{4}{3}$ tienen el numerador mayor que el denominador y que son mayores que la unidad.

Las fracciones que tienen iguales el numerador y el denominador son iguales a la unidad.

Las fracciones que tienen el numerador menor que el denominador son menores que la unidad.

Las fracciones que tienen el numerador mayor que el denominador son mayores que la unidad.

Actividades

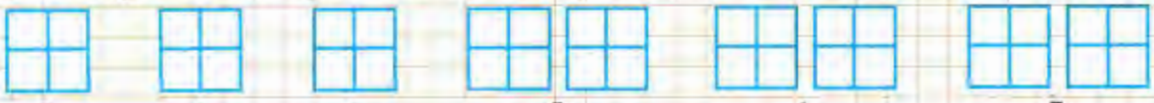
1. Escribe debajo de cada figura la fracción que representa la parte coloreada.

Después completa la frase en cada caso.

... es ... que 1. ... es ... que 1. ... es ... que 1. ... es ... que 1.

2. Representa gráficamente las siguientes fracciones.

Debes rayar en cada gráfico la fracción que se indica.



$\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{6}{4}$ $\frac{7}{4}$

3. Calcula:

$\frac{3}{3}$ de 12 = ... $\frac{4}{4}$ de 20 = ... $\frac{5}{5}$ de 20 = ... $\frac{6}{6}$ de 30 = ...

4. Colorea los $\frac{3}{4}$ de los círculos:

5. Colorea los $\frac{4}{4}$ de los círculos:

6. Contesta:

¿Qué es mayor, $\frac{1}{3}$ de 60 o $\frac{2}{3}$ de 60?

7. Rodea las fracciones que son mayores que la unidad:

$\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{8}{3}$ $\frac{6}{9}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{13}{11}$ $\frac{8}{7}$

8. Escribe:

- Tres fracciones que sean mayores que la unidad.
- Tres fracciones que sean menores que la unidad.
- Tres fracciones que valgan igual que la unidad.

9. Lee y resuelve:

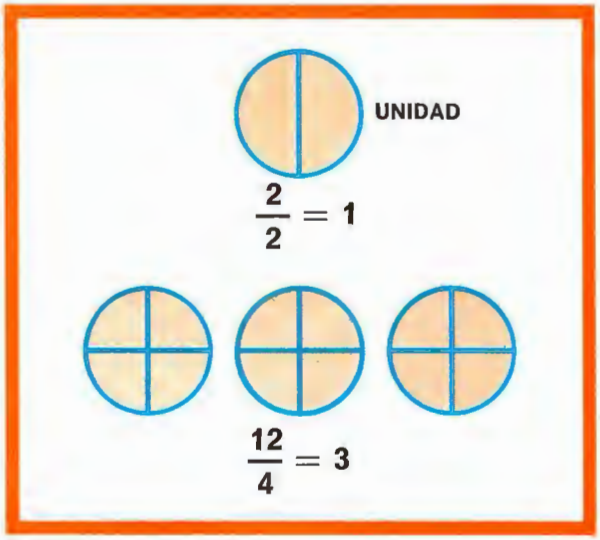
- Como $\frac{3}{4}$ es menor que la unidad, al hallar los $\frac{3}{4}$ de un número el resultado es menor que ese número. Compruébalo hallando:

  a) $\frac{3}{4}$ de 40 b) $\frac{3}{4}$ de 80 c) $\frac{3}{4}$ de 300

- Como $\frac{5}{3}$ es mayor que la unidad, al hallar los $\frac{5}{3}$ de un número el resultado es mayor que ese número. Compruébalo hallando:

) $\frac{5}{3}$ de 90 b) $\frac{5}{3}$ de 60 c) $\frac{5}{3}$ de 300

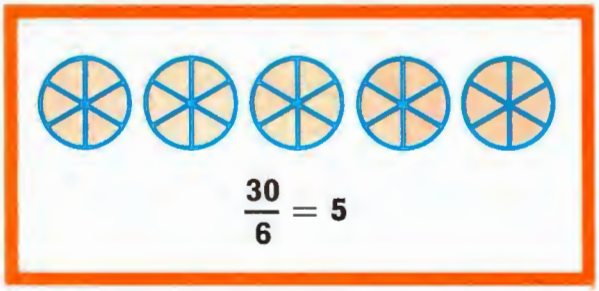
2. Fracciones que representan un entero.



Observa las figuras y lee atentamente.

En 1 unidad o 1 entero hay dos medios o dos mitades.

En 3 unidades o 3 enteros hay doce cuartos.

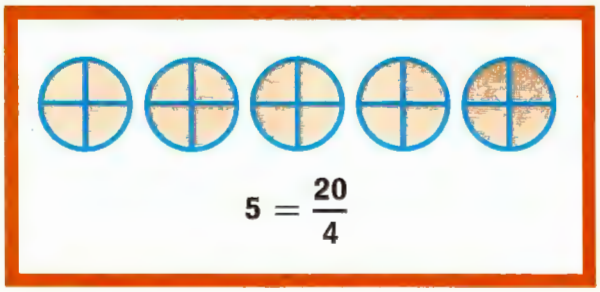


¿Qué número representa la fracción $\frac{30}{6}$?

Para averiguarlo se divide 30 por 6:

$30 : 6 = 5$, luego $\frac{30}{6} = 5$.

La fracción $\frac{30}{6}$ representa el número entero 5.



¿Cuántos cuartos hay en 5 unidades?

Tenemos que averiguar el numerador de la fracción $\frac{\square}{4} = 5$.

Esto es lo mismo que preguntarse: ¿Qué número dividido por 4 da 5?

$\square : 4 = 5$, luego $\square = 4 \times 5 = 20$

En 5 unidades hay 20 cuartos: $5 = \frac{20}{4}$.

1. ¿Cuántos medios hay en 2 unidades?

Completa: $2 = \frac{\square}{2}$

2. ¿Cuántos tercios de litro hay en 2 litros?

Completa: 2 litros $= \frac{\square}{3}$ de litro.

3. Completa:

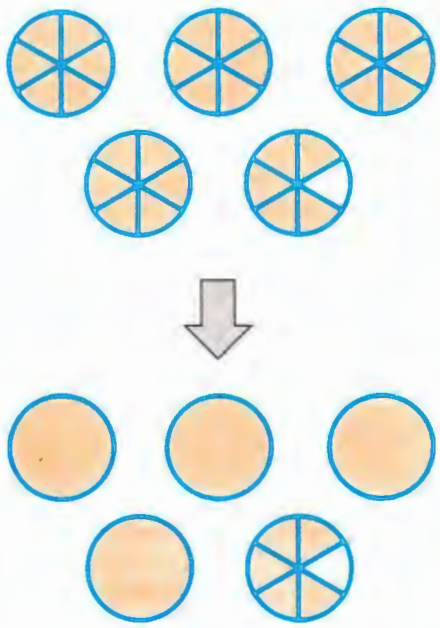
$4 = \frac{\square}{3}$ $\quad 6 = \frac{\square}{5}$ $\quad 3 = \frac{\square}{7}$ $\quad 2 = \frac{\square}{3}$

4. ¿Qué número entero representan las fracciones siguientes?

$\frac{8}{2} = \ldots$ $\quad \frac{34}{17} = \ldots$ $\quad \frac{12}{4} = \ldots$

$\frac{15}{3} = \ldots$ $\quad \frac{18}{6} = \ldots$

3. Los enteros de una fracción mayor que 1.



$\frac{29}{6}$ de círculo =

= 4 círculos + $\frac{5}{6}$ de círculo

¿Cuántos enteros tiene la fracción $\frac{29}{6}$?

Observa en la figura que cada círculo tiene $\frac{6}{6}$.

- En 4 círculos hay:
  $6 \times 4 = 24$ sextos de círculo.
- En los 5 círculos la parte coloreada es $\frac{29}{6}$ de círculo.

La fracción $\frac{29}{6}$ tiene 4 enteros más la fracción $\frac{5}{6}$.

También se puede averiguar el número de enteros que tiene la fracción $\frac{29}{6}$ dividiendo 29 por 6:

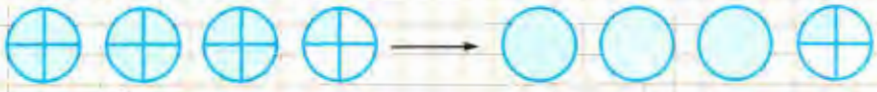
$$\begin{array}{r|l} 29 & 6 \\ 5 & 4 \end{array}$$ ← enteros

$$\frac{29}{6} = 4 + \frac{5}{6}$$

Así ha resultado que $\frac{29}{6}$ es igual a la suma de un entero y una fracción menor que 1.

Para hallar los enteros de una fracción mayor que 1 se divide el numerador entre el denominador. El cociente obtenido son los enteros, el resto es el numerador de la nueva fracción y el denominador es el mismo.

1. Observa los dibujos y completa:



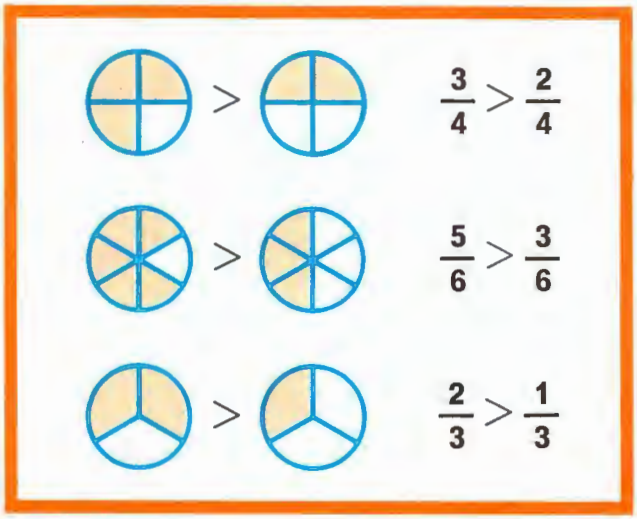
$\frac{13}{4}$ de círculo = ... círculos + $\frac{1}{4}$ de círculo

$\frac{\square}{\square}$ de círculo = ... círculos + $\frac{\square}{\square}$ de círculo

2. Completa:

$$\begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ 1 & 3 \end{array} \longrightarrow \frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4} \qquad \begin{array}{r|l} 22 & 4 \\ 2 & 5 \end{array} \longrightarrow \frac{22}{4} = 5 + \frac{\square}{\square}$$

4. Comparación de fracciones sencillas.



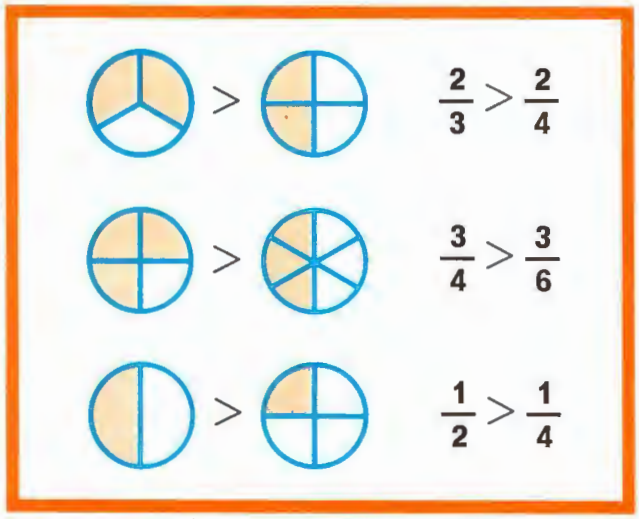
Fracciones de igual denominador

Observa las fracciones representadas.

En cada caso las fracciones tienen igual denominador.

- $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{2}{4}$
- $\frac{5}{6}$ es mayor que $\frac{3}{6}$
- $\frac{2}{3}$ es mayor que $\frac{1}{3}$

De dos fracciones que tienen igual el denominador es mayor la que tiene mayor el numerador.



Fracciones de igual numerador

Observa las fracciones representadas.

En cada caso las fracciones tienen igual numerador.

- $\frac{2}{3}$ es mayor que $\frac{2}{4}$
- $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{3}{6}$
- $\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{1}{4}$

De dos fracciones que tienen igual el numerador es mayor la que tiene menor el denominador.

1. Escribe en cada ◯ el signo >, <, según corresponda:

$\frac{1}{2} \bigcirc \frac{1}{3}$ $\quad \frac{3}{4} \bigcirc \frac{3}{5}$ $\quad \frac{4}{9} \bigcirc \frac{7}{9}$ $\quad \frac{1}{4} \bigcirc \frac{1}{6}$

$\frac{2}{7} \bigcirc \frac{2}{9}$ $\quad \frac{3}{5} \bigcirc \frac{7}{5}$ $\quad \frac{1}{7} \bigcirc \frac{1}{5}$ $\quad \frac{7}{12} \bigcirc \frac{8}{12}$

2. Escribe a la derecha una fracción para que sea cierta la desigualdad.

$\frac{1}{5} > \frac{\square}{\square}$ $\quad \frac{2}{9} < \frac{\square}{\square}$ $\quad \frac{5}{7} > \frac{\square}{\square}$ $\quad \frac{7}{9} > \frac{\square}{\square}$

Ejercicios y problemas

1. Escribe siete fracciones menores que la unidad que tengan por denominador 8.

2. Escribe todas las fracciones de denominador 7 que sean menores que la unidad.

3. Escribe cinco fracciones de denominador 9 que sean mayores que la unidad.

4. Escribe las siguientes fracciones como suma de un entero y una fracción:

a) $\frac{5}{4} = 1 + \frac{\square}{\square}$ b) $\frac{6}{5} = \ldots + \frac{\square}{\square}$ c) $\frac{8}{7} = \ldots + \frac{\square}{\square}$ d) $\frac{32}{7} = \ldots + \frac{\square}{\square}$

5. Un kilogramo de café cuesta 840 pesetas. Completa:

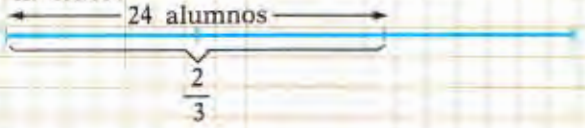
kilogramos	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	5	6
pesetas	**840**							

6. Completa:

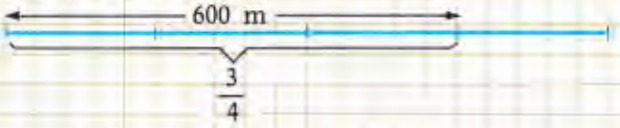
$\frac{2}{3}$ **de**	60	21	42	72	54	96	150	180	360	600	900

7. Laura ha tomado los $\frac{3}{5}$ de un vaso de agua. ¿Cuánto le queda al vaso?

8. A una fiesta van 24 alumnos, que representan los $\frac{2}{3}$ de la clase.
¿Cuántos alumnos tiene la clase?



9. Juan ha recorrido los $\frac{3}{4}$ del camino de su casa al colegio. Lleva recorridos 600 metros.
¿Qué distancia hay de su casa al colegio?



10. A Iván le dan cada domingo 180 pesetas. Se gasta $\frac{3}{5}$ de esta cantidad. ¿Cuánto le queda?

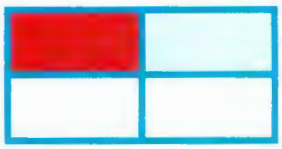
11. ¿Qué fracción es mayor, $\frac{2}{5}$ o $\frac{3}{5}$? Compruébalo con un dibujo.

Comprueba que $\frac{3}{5}$ de 60 es mayor que $\frac{2}{5}$ de 60.

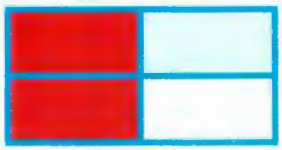
12. Una cuerda de 72 m de longitud se corta en dos trozos.
Uno tiene las $\frac{5}{6}$ partes de la cuerda. ¿Cuántos metros mide cada trozo?

13. Luis tiene 300 pesetas. Se gastó el sábado $\frac{2}{5}$ de esta cantidad y el domingo los $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba.
¿Cuánto se gastó el sábado? ¿Y el domingo? ¿Cuánto le queda al final?

1. Suma de fracciones del mismo denominador.



$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$



$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Vamos a calcular en cada caso la suma de la fracción que representa la parte azul y la fracción que representa la parte roja.

La parte coloreada es $\frac{2}{4}$.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4}$$

La parte coloreada es $\frac{3}{4}$.

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

Observa que en los dos casos se han sumado los numeradores y que el denominador de la **fracción suma** es siempre **4.**

Observa ahora las siguientes sumas.

$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

$\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

La parte coloreada es $\frac{2}{6}$.

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1+1}{6} = \frac{2}{6}$$

La parte coloreada es $\frac{4}{6}$.

$$\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6}$$

La parte coloreada es $\frac{5}{6}$.

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

Para sumar dos fracciones del mismo denominador se suman los numeradores y se deja el mismo denominador.

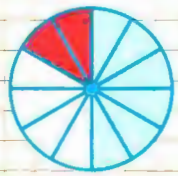
1. Observa la figura y completa:

Coloreado de rojo → $\frac{3}{10}$.

Coloreado de azul → $\frac{4}{10}$.

Total coloreado: $\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{\square+\square}{10} = \frac{\square}{10}$.

2. Observa la figura y completa:

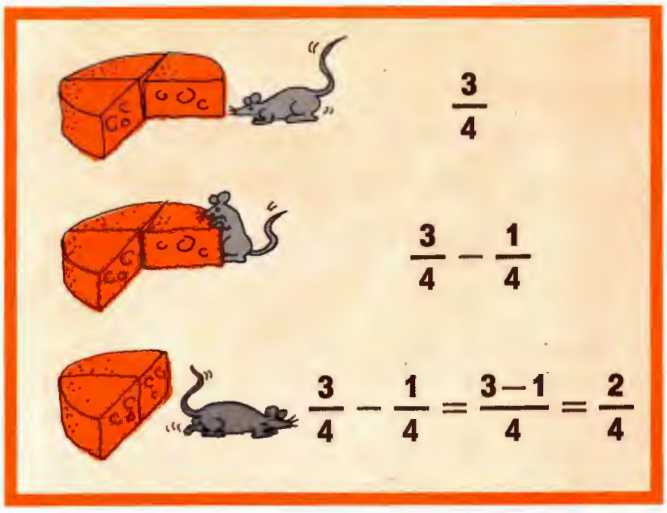


Coloreado de rojo → $\frac{2}{12}$.

Coloreado de azul → $\frac{\square}{\square}$.

Total coloreado: $\frac{2}{12} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square+\square}{12} = \frac{\square}{\square}$.

2. Sustracción de fracciones del mismo denominador.



Observa las figuras y lee atentamente:

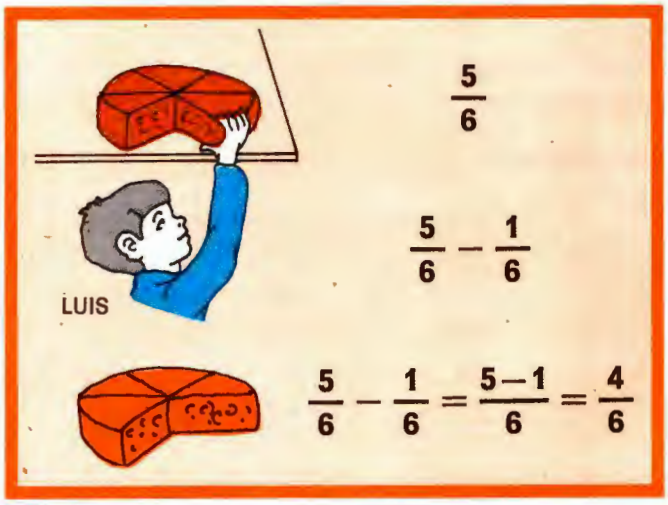
Hay $\frac{3}{4}$ de kilo de queso.

El ratón se comió $\frac{1}{4}$.

¿Cuánto queso queda?

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4}$$

Quedan $\frac{2}{4}$ de kilo de queso.



Observa las figuras y lee atentamente:

Hay $\frac{5}{6}$ de tarta.

Luis se come $\frac{1}{6}$.

¿Cuánta tarta queda?

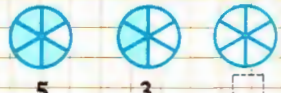
$$\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6}$$

Quedan $\frac{4}{6}$ de tarta.

Para restar fracciones del mismo denominador se restan los numeradores y se deja el mismo denominador.

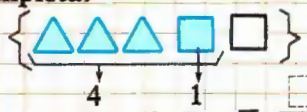
1. Observa las figuras y haz las restas de fracciones:

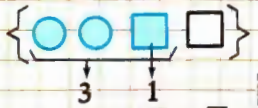
$\frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{\square}{\square}$

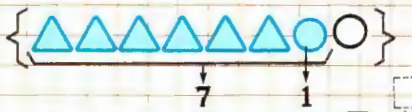

$\frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{\square}{\square}$

2. Completa:


$\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{\square}{\square}$


$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\square}{\square}$


$\frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{\square}{\square}$

3. Completa:

a) $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$ b) $\frac{8}{5} - \frac{3}{5}$ c) $\frac{9}{9} - \frac{4}{9}$ d) $\frac{5}{3} - \frac{2}{3}$ e) $\frac{8}{7} - \frac{3}{7}$

3. Fracciones equivalentes. Comprobación gráfica.

FRACCIONES EQUIVALENTES

$\frac{1}{2}$ de círculo

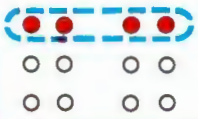
$\frac{2}{4}$ de círculo

$\frac{4}{8}$ de círculo

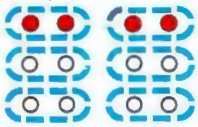
Observa en los gráficos que en los tres casos hay coloreada la misma porción de círculo.

Por eso se dice que las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ y $\frac{4}{8}$ son **fracciones equivalentes.**

Se escribe: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$.



$\frac{1}{3}$ de los círculos



$\frac{2}{6}$ de los círculos

$\frac{4}{12}$ de los círculos

Observa ahora que la parte de círculos coloreada es la misma.

Se dice que las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{12}$ son **fracciones equivalentes.**

Se escribe: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$.

1. Lee atentamente los ejemplos resueltos y completa los demás.

	$\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{2}{4}$	
	$\frac{2}{3}$ es equivalente a $\frac{\square}{\square}$	
	$\frac{\square}{\square}$ es equivalente a $\frac{6}{8}$	
	$\frac{\square}{\square}$ es equivalente a $\frac{\square}{\square}$	
	$\frac{\square}{\square}$ es equivalente a $\frac{2}{6}$	
	$\frac{\square}{\square}$ es equivalente a $\frac{\square}{\square}$	
	$\frac{\square}{\square}$ es equivalente a $\frac{\square}{\square}$	
	$\frac{\square}{\square}$ es equivalente a $\frac{\square}{\square}$	

Ejercicios y problemas

1. Observa las figuras y haz las sumas de las fracciones:

$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{7}{10} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{7}{16} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{7}{15} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

2. Observa las figuras y haz las sumas de las fracciones:

$\frac{3}{7} + \frac{3}{7} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{\square + \square + \square}{7} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{9} + \frac{\square}{9} + \frac{\square}{9} = \frac{\square + \square + \square}{9} = \frac{\square}{9}$

3. Efectúa:

a) $\frac{3}{8} + \frac{2}{8}$ b) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$ c) $\frac{5}{9} + \frac{3}{9}$ d) $\frac{3}{10} + \frac{5}{10}$

4. Haz la suma y convierte en entero la fracción suma:

a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{\square}{\square} = \square$ c) $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = \frac{\square}{\square} = \square$

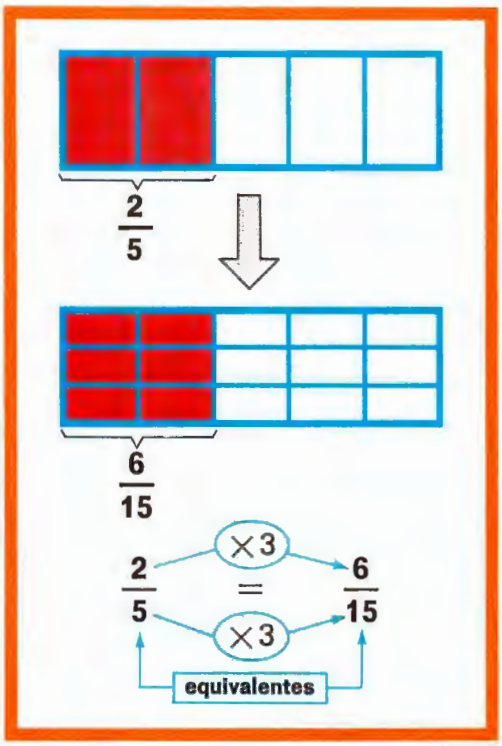
d) $\frac{5}{3} + \frac{4}{3} = \frac{9}{3} = 3$ e) $\frac{6}{5} + \frac{4}{5} = \frac{\square}{\square} = \square$ f) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\square}{\square} = \square$

5. Luis leyó el sábado $\frac{1}{5}$ de un libro y el domingo $\frac{3}{5}$ del mismo libro.
¿Qué fracción del libro leyó Luis ese fin de semana?

6. Por la mañana Carlos ha bebido $\frac{1}{4}$ de litro de leche y por la noche $\frac{2}{4}$ de litro.
¿Qué cantidad de leche ha bebido ese día?

7. Tengo 18 caramelos. El sábado me comí $\frac{2}{6}$ de los caramelos y el domingo $\frac{3}{6}$ de los caramelos.
¿Qué fracción de los caramelos me he comido en los dos días?
¿Cuántos caramelos me he comido?

1. Obtención de fracciones equivalentes.



Fracciones equivalentes por amplificación

Observa que hay coloreados de rojo $\frac{2}{5}$ del rectángulo.

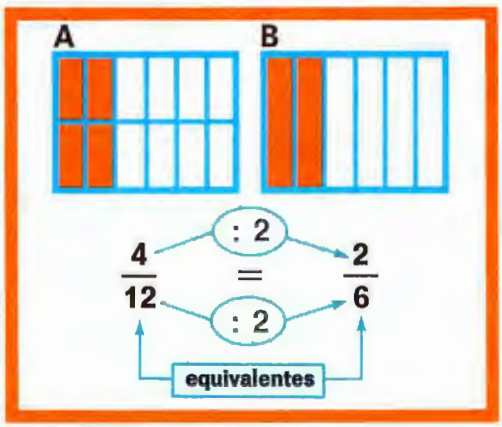
Si dividimos cada una de las cinco partes del rectángulo en tres partes iguales, resulta que la parte coloreada es $\frac{6}{15}$ del rectángulo.

Como la parte coloreada de los dos rectángulos es la misma, resulta que las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{15}$ son **fracciones equivalentes.**

Observa que la fracción $\frac{6}{15}$ se obtiene multiplicando los dos términos de $\frac{2}{5}$ por 3.

$$\frac{2}{5} = \frac{2\times3}{5\times3} = \frac{6}{15}$$

Si se multiplican el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número, se obtiene una fracción equivalente a la primera.

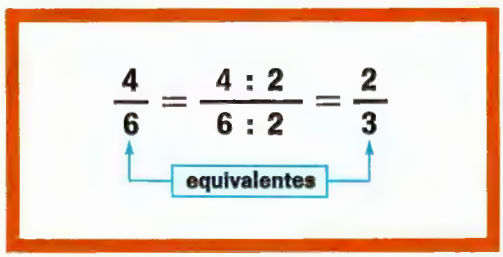


Fracciones equivalentes por simplificación

Observa las figuras **A** y **B**. En ellas se comprueba que las fracciones $\frac{4}{12}$ y $\frac{2}{6}$ son equivalentes.

Observa que la fracción $\frac{2}{6}$ se obtiene dividiendo los dos términos de $\frac{4}{12}$ por 2.

$$\frac{4}{12} = \frac{4:2}{12:2} = \frac{2}{6}$$

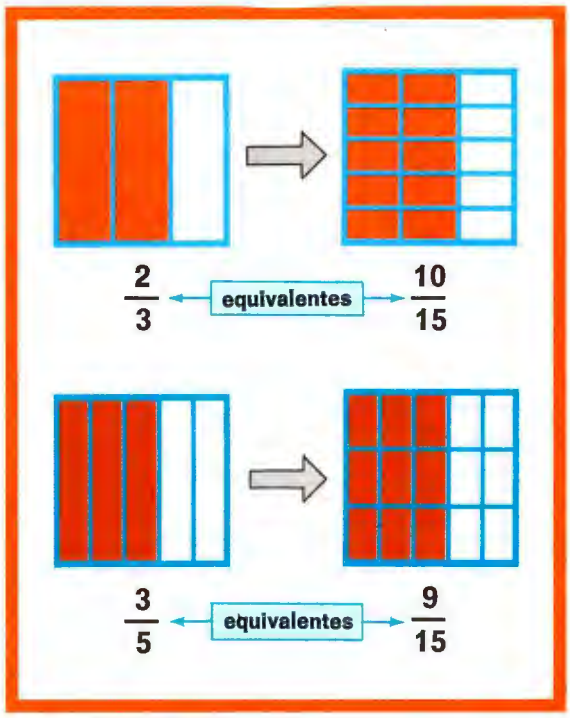


Observa otro ejemplo.

Observa que los términos de la fracción $\frac{2}{3}$ son menores que los de $\frac{4}{6}$. Se dice que hemos simplificado la fracción $\frac{4}{6}$.

Simplificar una fracción es hallar otra fracción equivalente a la dada, pero de términos menores. Para simplificar una fracción se dividen el numerador y el denominador por un mismo número.

2. Comparación de fracciones de distinto numerador y distinto denominador.



Vamos a comparar las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{5}$, es decir, vamos a averiguar cuál de ellas es mayor.

Para ello buscaremos dos fracciones equivalentes a las dadas, pero que tengan el mismo denominador.

Esto se puede conseguir multiplicando el numerador y el denominador de cada fracción por el denominador de la otra.

$$\frac{2}{3} = \frac{2\times5}{3\times5} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3\times3}{5\times3} = \frac{9}{15}$$

Como $\frac{10}{15}$ es mayor que $\frac{9}{15}$, resulta que $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$.

Para comparar fracciones de distinto denominador se hallan dos fracciones equivalentes a las dadas pero que tengan el mismo denominador. Para ello se multiplican el numerador y el denominador de cada fracción por el denominador de la otra.

1. Compara las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$ y completa los ☐ y el ◯.

$\frac{3}{4} = \frac{3\times5}{4\times5} = \frac{\square}{\square}$ (equivalentes) $\qquad \frac{2}{5} = \frac{2\times4}{5\times4} = \frac{\square}{\square}$ (equivalentes)

Como $\frac{15}{20} > \frac{8}{20} \rightarrow \frac{3}{4} \bigcirc \frac{2}{5}$

2. Compara las fracciones $\frac{4}{7}$ y $\frac{5}{8}$ y completa los ☐ y el ◯.

$\frac{4}{7} = \frac{4\times\square}{7\times\square} = \frac{\square}{\square}$ (equivalentes) $\qquad \frac{5}{8} = \frac{5\times\square}{8\times\square} = \frac{\square}{\square}$ (equivalentes)

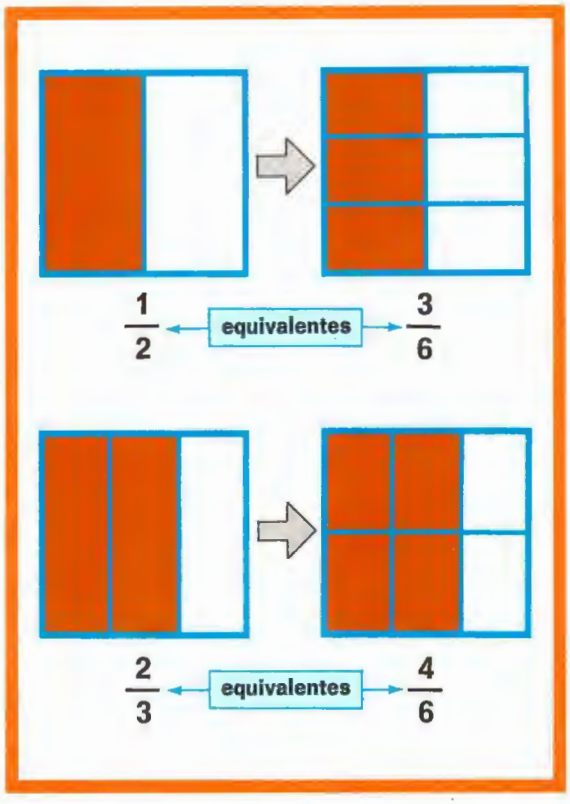
Como $\frac{35}{56} > \frac{\square}{\square} \rightarrow \frac{5}{8} \bigcirc \frac{4}{7}$

3. Haz las operaciones en tu cuaderno y escribe en los círculos el signo > o <, según corresponda:

a) $\frac{2}{3} \bigcirc \frac{3}{5}$ $\qquad$ b) $\frac{2}{5} \bigcirc \frac{3}{7}$ $\qquad$ c) $\frac{5}{7} \bigcirc \frac{6}{8}$ $\qquad$ d) $\frac{4}{3} \bigcirc \frac{5}{4}$

3. Suma y resta de fracciones de distinto denominador.

(Casos sencillos.)



Suma de fracciones de distinto denominador

Vamos a sumar las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$.

Como tienen distinto denominador se buscan en primer lugar dos fracciones equivalentes a las dadas, pero con el mismo denominador.

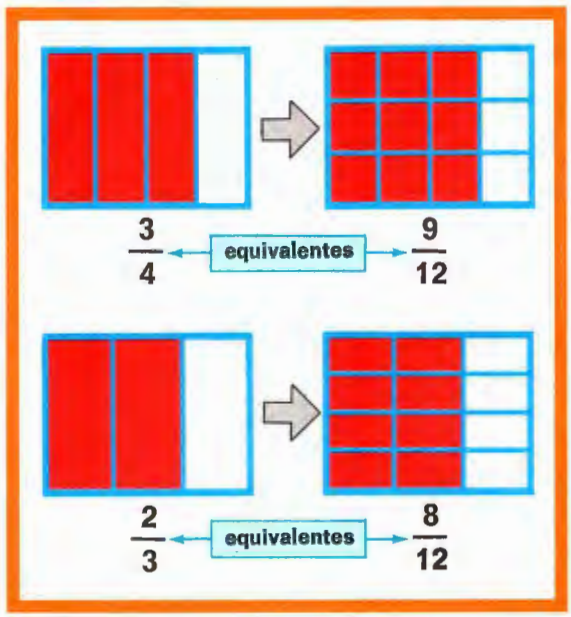
Una forma de conseguir estas fracciones equivalentes es multiplicar el numerador y el denominador de cada fracción por el denominador de la otra.

$$\frac{2}{3} = \frac{2\times 2}{3\times 2} = \frac{4}{6} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1\times 3}{2\times 3} = \frac{3}{6}$$

Para sumar $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ se suman $\frac{4}{6} + \frac{3}{6}$, que tienen el mismo denominador:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6}$$ ← suma

Para sumar dos fracciones de distinto denominador se buscan dos fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador. Después se suman estas fracciones.



Resta de fracciones de distinto denominador

Vamos a hacer la resta $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$.

Como en el caso de la suma, se multiplican los dos términos de cada fracción por el denominador de la otra.

$$\frac{3}{4} = \frac{3\times 3}{4\times 3} = \frac{9}{12} \qquad \frac{2}{3} = \frac{2\times 4}{3\times 4} = \frac{8}{12}$$

Para restar $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ se restan $\frac{9}{12} - \frac{8}{12}$, que tienen el mismo denominador:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{9-8}{12} = \frac{1}{12}$$ ← diferencia

Para restar dos fracciones de distinto denominador se buscan dos fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador. Después se restan estas fracciones.

Ejercicios y problemas

1. Haz las siguientes sumas de fracciones:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ i) $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}$

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ j) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$

c) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ g) $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$ k) $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}$

d) $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ h) $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$ l) $\frac{7}{12}+\frac{4}{12}$

m) $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{2}{8}$ n) $\frac{5}{13}+\frac{2}{13}+\frac{3}{13}$

2. Haz las siguientes restas de fracciones:

a) $\frac{3}{8}-\frac{1}{8}$ d) $\frac{7}{7}-\frac{2}{7}$ g) $\frac{7}{12}-\frac{1}{12}$

b) $\frac{7}{8}-\frac{5}{8}$ e) $\frac{7}{10}-\frac{3}{10}$ h) $\frac{7}{9}-\frac{4}{9}$

c) $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}$ f) $\frac{8}{11}-\frac{5}{11}$

3. Escribe fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ por amplificación.

Basta multiplicar numerador y denominador por el mismo número.

$\frac{2}{3}=\frac{2\times\square}{3\times\square}=\frac{\square}{\square}$ $\frac{4}{5}=\frac{4\times\square}{5\times\square}=\frac{\square}{\square}$

4. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{4}{10}=\frac{4:\square}{10:\square}=\frac{\square}{\square}$ b) $\frac{6}{8}=\frac{6:\square}{8:\square}=\frac{\square}{\square}$

5. Compara las siguientes fracciones y escribe en los círculos el signo $<$ o $>$.

a) $\frac{4}{5}\bigcirc\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{9}\bigcirc\frac{4}{8}$ e) $\frac{7}{11}\bigcirc\frac{8}{9}$

b) $\frac{3}{7}\bigcirc\frac{2}{7}$ d) $\frac{7}{8}\bigcirc\frac{8}{9}$ f) $\frac{6}{15}\bigcirc\frac{8}{13}$

6. Simplifica las siguientes fracciones:

$\frac{4}{8}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{5}{15}$ $\frac{6}{4}$ $\frac{2}{6}$

7. ¿Cuántos minutos son $\frac{1}{4}$ de hora y $\frac{1}{3}$ de hora?

8. Una caja tiene 60 caramelos. Luis se comió $\frac{1}{5}$ de los caramelos y Ana $\frac{1}{2}$ de los caramelos.

¿Cuántos caramelos se comió Luis? ¿Y Ana?

¿Qué fracción de los caramelos se comieron entre Luis y Ana?

9. Un día he leído $\frac{1}{5}$ de un libro y al día siguiente los $\frac{2}{5}$ del mismo libro.

¿Qué fracción del libro he leído?

¿Qué fracción del libro me falta por leer?

10. Por la mañana me bebí $\frac{1}{3}$ de litro de leche y por la noche $\frac{2}{3}$ de litro.

¿Qué cantidad de leche he bebido ese día?

11. En una colección de cromos los $\frac{2}{7}$ son de animales, los $\frac{3}{7}$ son de vegetales y el resto de minerales.

¿Qué fracción de los cromos son de seres vivos?

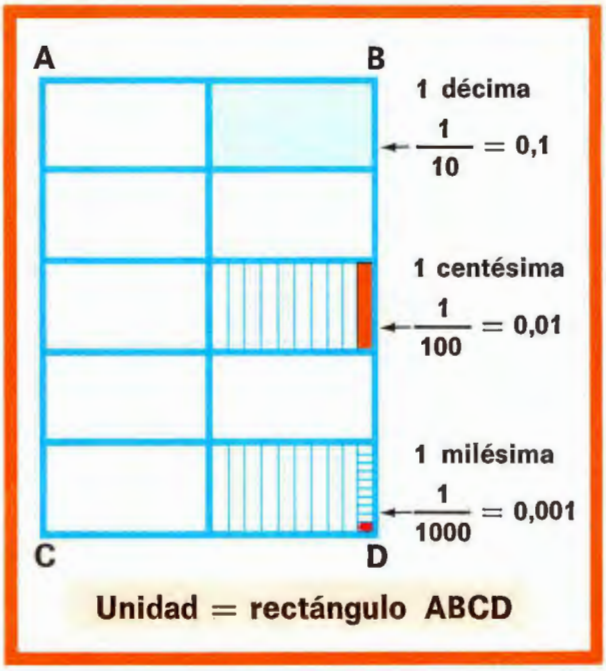
¿Qué fracción de los cromos son de minerales?

12. Se han pintado de rojo los $\frac{3}{10}$ de un segmento y de azul los $\frac{6}{10}$ del mismo segmento.

¿Qué fracción del segmento queda coloreada?

13. ¿Cuántos años tiene Merche?

1. Fracciones decimales.



Décimas, centésimas y milésimas

Consideremos el rectángulo **ABCD** como unidad.

- El rectángulo **ABCD** tiene **10 partes** iguales a la parte azul; por eso la parte azul es **1 décima** del rectángulo.
- El rectángulo **ABCD** tiene **100 partes** iguales a la parte naranja; por eso la parte naranja es **1 centésima** del rectángulo.
- El rectángulo **ABCD** tiene **1.000 partes** iguales a la parte roja; por eso la parte roja es **1 milésima** del rectángulo.

Se observa lo siguiente.

1 unidad = 10 décimas = 100 centésimas = 1.000 milésimas

Observa cómo se escriben y cómo se leen las fracciones cuyos denominadores son 10, 100, 1.000, etc.

Partes iguales en que se divide la unidad	Cada parte es	Se escribe	Se lee
10 partes iguales	1 décima	$\frac{1}{10} = 0{,}1$	Una décima.
100 partes iguales	1 centésima	$\frac{1}{100} = 0{,}01$	Una centésima.
1.000 partes iguales	1 milésima	$\frac{1}{1000} = 0{,}001$	Una milésima.
10.000 partes iguales	1 diezmilésima	$\frac{1}{10000} = 0{,}0001$	Una diezmilésima.
100.000 partes iguales	1 cienmilésima	$\frac{1}{100000} = 0{,}00001$	Una cienmilésima.
1.000.000 de partes iguales	1 millonésima	$\frac{1}{1000000} = 0{,}000001$	Una millonésima.

Las fracciones $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, etc., son fracciones decimales.

Fracciones decimales son las que tienen por denominador la unidad seguida de ceros.

2. Números decimales. I.

UNIDADES DECIMALES

1 decena = 10 unidades

1 unidad = 10 décimas

1 décima = 10 centésimas

1 centésima = 10 milésimas

1 milésima = 10 diezmilésimas

Unidades decimales

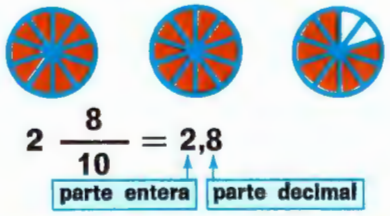
Las decenas, las centenas, los millares, etc., son unidades del Sistema de Numeración Decimal **mayores** que la unidad.
Las unidades decimales (décimas, centésimas, milésimas) son unidades **menores** que la unidad.

Si la unidad es el metro, las décimas son el decímetro, las centésimas son el centímetro y las milésimas son el milímetro.

Observa que las unidades decimales se relacionan entre sí como las restantes unidades del Sistema de Numeración Decimal.

PARTE ENTERA					PARTE DECIMAL				
Decenas de millar	Millares	Centenas	Decenas	Unidades simples	Décimas	Centésimas	Milésimas	Diez-milésimas	Cien-milésimas
DM	M	C	D	U	d	c	m	dm	cm
Quinto orden	Cuarto orden	Tercer orden	Segundo orden	Primer orden	Primer orden decimal	Segundo orden decimal	Tercer orden decimal	Cuarto orden decimal	Quinto orden decimal

La relación fundamental entre las unidades del Sistema de Numeración Decimal es que diez unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediato superior.



$$2\,\frac{8}{10} = 2{,}8$$

parte entera | parte decimal

Números decimales

Los números **2,8; 3,5; 0,75** ... constan de dos partes: **parte entera** y **parte decimal**, y se llaman **números decimales.**

2 , 8

parte entera | parte decimal

Un número decimal tiene dos partes: parte entera, a la izquierda de la coma, y parte decimal, a la derecha. Si el número decimal vale menos de 1, la parte entera vale cero.

1. Contesta:

¿Qué lugar ocupan las décimas en relación con la coma? ¿Y las centésimas? ¿Y las milésimas?

2. Rodea con un círculo rojo la parte entera y con un círculo azul la parte decimal:

4,28 6,25 0,28 0,05 3,725 3,278 0,056 34,26

3. Números decimales. II.

M	C	D	U	d	c	m	dm
		4	3,	2	4	8	
	7	2	8,	6	2	5	
			0,	2	5		
			0,	0	4	2	

Lectura de números decimales

Observa los números decimales situados en el cuadro de unidades. La coma separa la parte entera y la parte decimal.

Observa cómo se leen estos números.

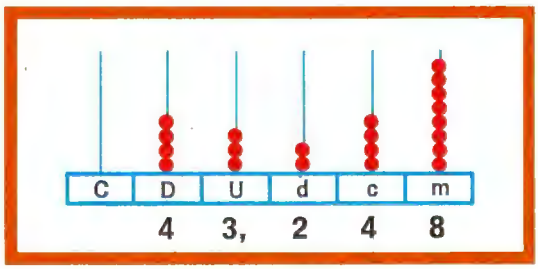
43,248 → cuarenta y tres enteros doscientas cuarenta y ocho milésimas

728,625 → setecientos veintiocho enteros seiscientas veinticinco milésimas

0,25 → cero enteros veinticinco centésimas, o bien, veinticinco centésimas

0,042 → cuarenta y dos milésimas

Para leer un número decimal se lee primero la parte entera, seguida de la palabra «enteros» o «unidades», y a continuación la parte decimal, nombrando el orden de la última cifra que aparezca en ella.



Descomposición de números decimales

Observa el número **43,248**, representado en el ábaco.

La descomposición de este número en suma de sus diferentes órdenes de unidades es la siguiente:

$$43{,}248 = \underbrace{4}_{40}\ \text{decenas} + \underbrace{3}_{3}\ \text{unidades} + \underbrace{2}_{\frac{2}{10}}\ \text{décimas} + \underbrace{4}_{\frac{4}{100}}\ \text{centésimas} + \underbrace{8}_{\frac{8}{1000}}\ \text{milésimas}$$

$$43{,}248 = 40 + 3 + \frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{8}{1000}$$

$$43{,}248 = 40 + 3 + 0{,}2 + 0{,}04 + 0{,}008$$

1. Escribe cómo se leen estos números:

0,72 2,758 45,26 3,24 0,046 285,6

2. Haz las descomposiciones:

a) De los números del ejercicio 1.

b) De 36,282 y 4,012.

3. Contesta a estas preguntas:

¿Qué valor tienen las cifras 5 en el número 52,658?

¿Depende el valor de una cifra del lugar que ocupa?

4. Escribe estos números:

a) Ochenta y cinco centésimas.

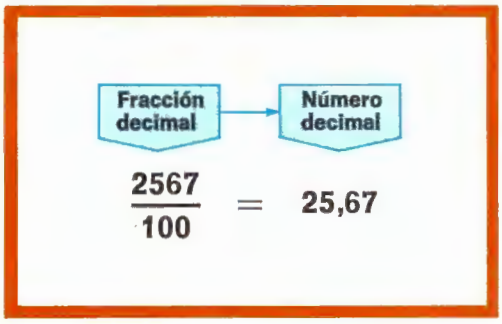
b) Cincuenta y dos milésimas.

c) Seis diezmilésimas.

5. Representa en el ábaco los siguientes números:

12,758 23,64 37,635 248,25

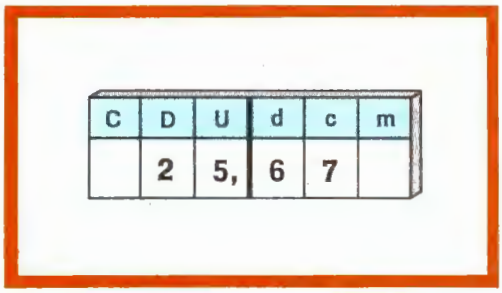
4. Escritura de una fracción decimal en forma de número decimal y viceversa.



¿Cómo se escribe una fracción decimal en forma de número decimal?

Sea la fracción decimal $\frac{2567}{100}$.

Como una fracción es un cociente de dos números, basta dividir el numerador por el denominador, y se tiene $\frac{2567}{100} = 25{,}67$.

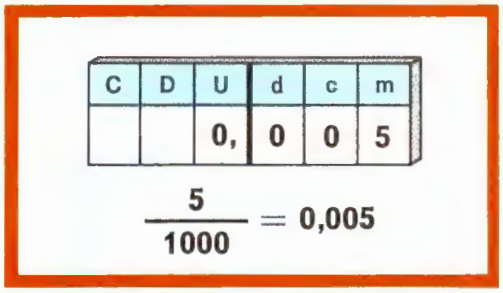


También se puede obtener este resultado colocando el número en el cuadro de unidades. (El número 2.567 centésimas se ha colocado en el cuadro de forma que la última cifra, 7, quede en la casilla de las centésimas.)

Al poner la coma entre las unidades simples y las décimas resulta el número **25,67.**

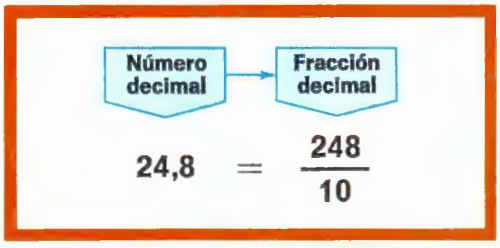
De forma análoga se tiene:

$\frac{248}{10} = 24{,}8$ $\qquad$ $\frac{625}{1000} = 0{,}625$



Si en el numerador no hay cifras suficientes, como ocurre en la fracción $\frac{5}{1000}$, se escribe a su izquierda el número conveniente de ceros.

Para escribir en forma decimal una fracción decimal, se escribe sólo el numerador y se separan, con una coma a partir de la derecha, tantas cifras decimales como ceros tiene el denominador.



¿Cómo se escribe un número decimal en forma de fracción decimal?

Procediendo en forma inversa a la anterior resulta:

$25{,}67 = \frac{2567}{100}$ $\qquad$ $24{,}8 = \frac{248}{10}$ $\qquad$ $0{,}005 = \frac{5}{1000}$

Para escribir un número decimal en forma de fracción decimal, se escribe el número, sin coma, en el numerador. El denominador es la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número.

1. Escribe en forma decimal o en forma de fracción, según corresponda:

a) $\frac{12}{10}$ $\quad$ b) $\frac{12}{100}$ $\quad$ c) $\frac{12}{1000}$ $\quad$ d) 3,2 $\quad$ e) 3,24 $\quad$ f) 0,0008 $\quad$ g) 0,012

5. Comparación de números decimales.

PRIMER CASO

Cuando los dos números decimales tienen la parte entera diferente.

En este caso sólo se compara la parte entera, y el problema queda reducido a comparar números naturales.

Ejemplo: Los números **428,32** y **615,84** tienen la parte entera desigual.

Por eso comparamos sólo la parte entera, 428 y 615.

Como 428 < 615, resulta que 428,32 es menor que 615,84, es decir, **428,32 < 615,84,** o también, **615,84 > 428,32.**

428,32 y 615,84

428 < 615

428,32 < 615,84

3,49 y 3,61

4 < 6

3,49 < 3,61

3,49 < 3,61

SEGUNDO CASO

Cuando los dos decimales tienen la misma parte entera.

En este caso se comparan las partes decimales, comenzando por las décimas.

Los números **3,49** y **3,61** tienen la misma parte entera (3); por eso comparamos las partes decimales empezando por las décimas.

Como 4 décimas<6 décimas, resulta que **3,49<3,61.**

Si los dos números que se comparan tienen igual también las décimas, se comparan las centésimas.

Así, en los números **2,849** y **2,871** se tiene:
4 centésimas<7 centésimas; por tanto: **2,849<2,871.**

4 < 7

2,849 < 2,871

2,849 < 2,871

1. Contesta a estas preguntas:

- ¿Qué número es mayor, 7,6 o 7,58? (Recuerda que 7,6=7,60.)
- ¿Qué número es mayor, 42,758 o 42,761?

2. Lee atentamente y resuelve:

Mira cómo se escriben nueve números comprendidos entre 5,6 y 5,7. Observa que cada uno es una centésima mayor que el anterior.

5,6 5,61 5,62 5,63 5,64 5,65 5,66 5,67 5,68 5,69 5,70

- Escribe ahora nueve números comprendidos entre 2,3 y 2,4 y otros nueve comprendidos entre 2,7 y 2,8.

3. Ordena de menor a mayor estos números:

6,4 6,004 6,0004 6,04 5,4 5,98 6 6,024

Cálculo mental, cálculo rápido

1. ¿Cuántas décimas tiene 1 unidad? ¿Y 2 unidades? ¿Y 5 unidades?

2. ¿Cuántas centésimas tiene 1 décima? ¿Y 2 décimas? ¿Y 5 décimas?

3. ¿Cuántas milésimas tiene 1 centésima? ¿Y 2 centésimas? ¿Y 5 centésimas?

4. ¿Cuántas diezmilésimas tiene 1 milésima? ¿Y 2 milésimas? ¿Y 5 milésimas?

Ejercicios y problemas

1. Rodea en cada conjunto la fracción que es equivalente al decimal:

$0{,}7 \longrightarrow \left\{ \frac{7}{10}, \frac{7}{100}, \frac{7}{10000} \right\}$

$0{,}024 \longrightarrow \left\{ \frac{24}{10}, \frac{24}{100}, \frac{24}{1000}, \frac{24}{10000} \right\}$

2. Escribe cómo se leen los siguientes números:

a) 0,025 c) 84,23 e) 0,0048

b) 3,745 d) 5,75 f) 2,05

3. ¿Qué valor tiene la cifra 2 en el número 38,652?

4. Escribe los números siguientes:

a) Veintiocho milésimas.

b) Ochenta y cuatro diezmilésimas.

c) Nueve diezmilésimas.

d) Cuatro millonésimas.

5. Representa los siguientes números en el ábaco y haz su descomposición en suma de sus diversos órdenes de unidades:

a) 36,428 b) 3,75 c) 18,346 d) 158,625

6. Escribe en forma decimal las siguientes fracciones decimales:

$\frac{26}{100}$ $\frac{128}{100}$ $\frac{3465}{100}$ $\frac{6}{100}$ $\frac{6}{10}$

$\frac{6}{1000}$ $\frac{6}{10000}$ $\frac{6}{100000}$

7. Escribe en forma de fracción:

a) 48,62 c) 0,26 e) 0,0026

b) 34,8 d) 0,026 f) 2,36

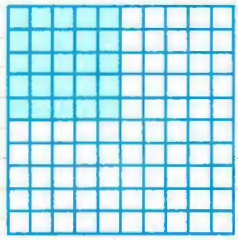
8. ¿Qué es mayor:

a) 7 décimas o 52 centésimas?

b) 76 décimas o 760 centésimas?

c) 6 centésimas o 60 milésimas?

9. Observa que el cuadrado está dividido en 100 partes iguales y que hay coloreadas 25 partes, es decir, 25 centésimas.



También se puede decir que están pintados el 25 por 100 de los cuadraditos.

El 25 por 100 se escribe así: 25 %.

$$25\ \% = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

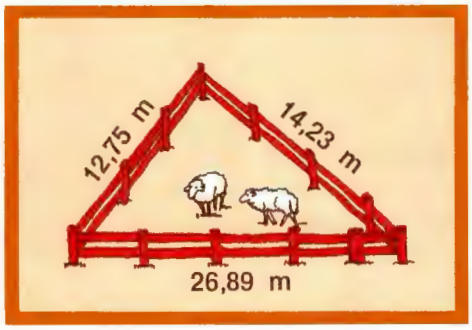
Completa el siguiente cuadro:

Número decimal	Forma de fracción	Tanto por ciento
0,12	$\frac{12}{100}$	12 %
0,8	$\frac{8}{10} = \frac{80}{100}$	80 %
0,16		
0,25		
		13 %

10. El 15 % de 2.000 es: $\frac{15 \times 2.000}{100} = 300$.

Halla el 8 % de 3.000 y el 6 % de 9.000.

1. Suma de números decimales. I.



Una valla de alambre está formada por tres trozos. Uno mide 12,75 m, otro 26,89 m y el tercero 14,23 m.

¿Cuánto mide toda la valla?

Para resolver este problema hay que sumar los números decimales **12,75, 26,89** y **14,23.**

Observa dos formas de hacer esta suma.

PRIMERA FORMA

Cálculo en metros

dam	m	dm	cm	
1	2,	7	5	
2	6,	8	9	
+ 1	4,	2	3	
5	3,	8	7	m

SEGUNDA FORMA

Cálculo en centímetros

dam	m	dm	cm	
1	2	7	5	
2	6	8	9	
+ 1	4	2	3	
5	3	8	7	cm

Toda la valla mide 5.387 cm = 53,87 m.

Para sumar varios números decimales:

- **Primero se escriben unos debajo de otros, de modo que se correspondan las unidades del mismo orden.**
- **Después se suman como si fueran números naturales y se pone la coma en el resultado, bajo la columna de las comas.**

1. Haz las siguientes sumas de números decimales:

25,74 + 18,43	346,25 + 48,32	3,625 + 2,834
72,25 + 5,6	28,324 + 2,6	27,32 + 4,68

2. Une los números decimales que suman 3:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
1,6	1,3	1,5	1,2	1,1	1,4	1,7	1,9	1,8

3. Lee y contesta:

La siguiente serie de números se ha formado sumando 0,5, pero hay un número que no debería estar en la serie. ¿Cuál es?

0,7 → 1,20 → 1,7 → 2,20 → 2,05 → 2,7

4. Resuelve:

Ana tenía que sumar los números 32,5 y 2,76, y los ha sumado así:

$$\begin{array}{r} 32{,}5 \\ +\ 2{,}76 \\ \hline 60{,}1 \end{array}$$

¿Qué números ha sumado Ana en realidad?

2. Suma de números decimales. II.

SUMA EN FORMA DECIMAL

$$\begin{array}{r} 12{,}75 \\ 26{,}89 \\ +\ 14{,}23 \\ \hline 53{,}87 \end{array}$$

SUMA EN FORMA DE FRACCIÓN

$$\frac{1275}{100} + \frac{2689}{100} + \frac{1423}{100} = \frac{5387}{100}$$

$$\frac{5387}{100} = 53{,}87$$

Observa las dos maneras de sumar estos números decimales: **12,75, 26,89** y **14,23.**

Cualesquiera otros números decimales pueden sumarse también de dos maneras.

Por ejemplo, los números decimales **2,36** y **1,2** pueden sumarse:

1.° En forma decimal

$$\begin{array}{r} 2{,}36 \\ +\ 1{,}2 \\ \hline 3{,}56 \end{array}$$

2.° En forma de fracción

1,2 = 12 décimas = 120 centésimas

$$\frac{236}{100} + \frac{120}{100} = \frac{356}{100} = 3{,}56$$

La suma de números decimales se puede hacer en forma decimal o en forma de fracción y se obtiene el mismo resultado.

1. Haz la suma 2,6 + 1,32 en forma decimal y en forma de fracción:

$$2{,}6 + 1{,}32 = \frac{26}{10} + \frac{132}{100} = \frac{260}{100} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

2. Observa las rectas numéricas y haz las sumas que se indican:

$0{,}9 + 0{,}3 = \ldots$

$1{,}3 + 0{,}4 = \ldots$

3. Representa en la recta numérica la suma 0,9 + 0,7:

4. Observa los números del cuadro:

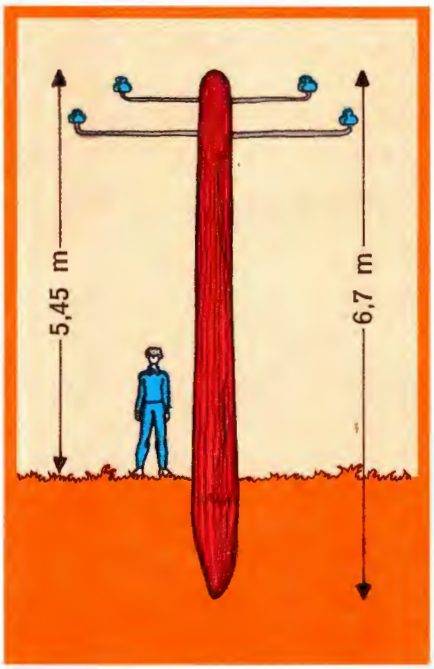
0,1	1,2	0,5	0
0,6	0,2	1	0,8
0,9	1,4	0,3	0,4
0,6	0,6	1,1	0,4
0	0,8	0,5	1,1

¿Cuál de las filas horizontales tiene mayor suma?

¿Cuál de las columnas verticales tiene mayor suma?

Hay dos números en el cuadro que suman 2,4. ¿Cuáles son?

3. Resta de números decimales. I. Casos.



PRIMER CASO

Cuando el minuendo y el sustraendo son números decimales

Un poste de teléfono mide 6,7 metros de longitud. La parte que queda al exterior mide 5,45 metros.

¿Cuánto mide la parte de poste hundida en el suelo?

- Para resolver este problema hay que hacer la resta **6,7 — 5,45.** Para hacer la resta agregamos un cero al minuendo.

$$\begin{array}{rcr} 6{,}7 & \longrightarrow & 6{,}70 \\ -\ 5{,}45 & \longrightarrow & -\ 5{,}45 \\ \hline & & \mathbf{1{,}25} \end{array}$$

La parte hundida del poste mide 1,25 metros.

- También podemos hacer el problema cambiando de unidad.

Cálculo en metros		Cálculo en centímetros
6,70 m	→	670 cm
— 5,45 m	→	— 545 cm
1,25 m	→	**125 cm**

SEGUNDO CASO

Cuando el minuendo es un número natural y el sustraendo es un número decimal

Observa cómo se hace la resta **8 — 3,25.**

$$\begin{array}{rcr} 8 & \longrightarrow & 8{,}00 \\ -\ 3{,}25 & \longrightarrow & -\ 3{,}25 \\ \hline \mathbf{4{,}75} & \longleftarrow & \mathbf{4{,}75} \end{array}$$

Para restar números decimales:

- **Primero se escriben el minuendo y el sustraendo de modo que las comas estén en columna. Si los números no tienen igual número de cifras decimales, se completan con ceros las cifras que faltan.**
- **Después se restan como si fueran números naturales y se pone la coma en el resultado bajo la columna de las comas.**

1. Haz las siguientes restas:

a) 23,28 — 12,6

b) 37 — 13,56

c) 8,72 — 5,89

d) 128,325 — 64,748

e) 53,6 — 12,845

f) 48,1 — 15,725

4. Resta de números decimales. II.

RESTA EN FORMA DECIMAL

$$\begin{array}{r} 6{,}7 \\ -\ 5{,}45 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 6{,}70 \\ -\ 5{,}45 \\ \hline 1{,}25 \end{array}$$

RESTA EN FORMA DE FRACCIÓN

$$6{,}7 - 5{,}45 = \frac{67}{10} - \frac{545}{100} =$$

$$= \frac{670}{100} - \frac{545}{100} = \frac{125}{100} = 1{,}25$$

Observa las dos maneras de hacer la resta **6,7 − 5,45.**

Otra resta cualquiera, por ejemplo **8 − 3,25,** también se puede hacer de estas dos formas.

1.° En forma decimal

$$\begin{array}{r} 8 \\ -\ 3{,}25 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 8{,}00 \\ -\ 3{,}25 \\ \hline 4{,}75 \end{array}$$

2.° En forma de fracción

$$8 - 3{,}25 = \frac{800}{100} - \frac{325}{100} = \frac{475}{100} = 4{,}75$$

La resta de dos números decimales se puede hacer en forma decimal o en forma de fracción y se obtiene el mismo resultado.

1. Haz la resta 2,5 − 1,24 en forma decimal y en forma de fracción:

Forma decimal

$$\begin{array}{r} 2{,}5 \\ -\ 1{,}24 \\ \hline \end{array}$$

Forma de fracción

$$2{,}5 - 1{,}24 = \frac{25}{10} - \frac{124}{100} = \frac{250}{100} - \frac{124}{100} = \frac{\square}{\square}$$

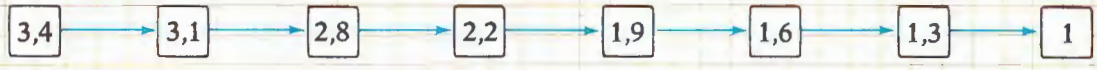
25 décimas = 250 centésimas

2. Haz las restas siguientes en forma decimal y en forma de fracción:

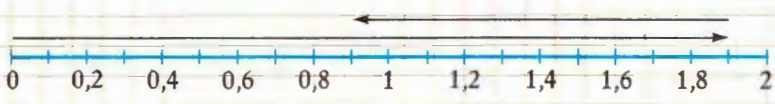
a) 3,25 − 1,34 c) 5 − 3,6 e) 12,5 − 7,8

b) 7,2 − 2,5 d) 7,5 − 3,27 f) 5,6 − 3,25

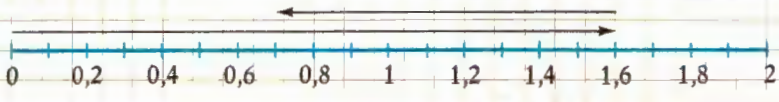
3. En la siguiente serie de números falta un número. ¿Cuál es?



4. Completa las restas de números decimales que se indican en las rectas numéricas.



1,9 − 1 = ...



1,6 − 0,9 = ...

Ejercicios y problemas

1. El cuadro muestra la puntuación de seis atletas en dos pruebas:

Atletas	Puntuación primera prueba	Puntuación segunda prueba	Puntuación total
Número 1	32,856	12,625	
Número 2	29,725	10,327	
Número 3	30,526	13,280	
Número 4	34,279	10,128	
Número 5	33,468	11,215	
Número 6	31,640	13,246	

¿Cuál fue la puntuación total de cada atleta?
¿Cuál fue el ganador de la primera prueba?
¿Cuál fue el ganador de la segunda prueba?

2. Completa la tabla:

+	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
0,1														
0,2														
0,3														
0,8														

3. Completa:

$4{,}5 - \ldots = 2{,}75$ $\quad$ $18 - 3{,}28 = \ldots$ $\quad$ $300 - \ldots = 146{,}321$

$13 - \ldots = 5{,}75$ $\quad$ $\ldots - 12{,}8 = 6{,}54$ $\quad$ $111 - \ldots = 26{,}32$

4. Completa el cuadro:

a	b	c	a + b + c	a + b − c	a − b + c
4,5	0,64	3,25			
8,75	4,5	2,6			
13,75	2,75	3,27			
43,36	12,84	7,45			

5. Ya sabes que en un cuadro mágico la suma de los números de cada columna es igual a la suma de los números de cada fila e igual a la suma de los números de cada diagonal.
Completa estos cuadros mágicos.

13,55	1,30	10,05
4,80	8,30	11,80

37,88		35,86
32,83		36,87
	38,89	31,82

6. En el siguiente cuadro mágico la suma de los números de cada fila y de cada columna es 2,60. Completa los cuadros vacíos.

0,01	0,48	0,31	0,50	0,33		0,63	0,18
0,30	0,51	0,46		0,62	0,19	0,14	0,35
	0,02	0,49	0,32	0,15	0,34	0,17	0,64
0,52	0,29	0,04	0,45	0,20	0,61	0,36	
0,05	0,44	0,25	0,56		0,40	0,21	0,60
0,28	0,53	0,08	0,41	0,24	0,57		0,37
	0,06	0,55	0,26	0,39	0,10	0,59	0,22
0,54	0,27	0,42	0,07	0,58	0,23	0,38	

7. ¿Cuál es la suma de cuatro números si el primero es 427,32 y cada uno de los siguientes es igual al anterior más 12,75?

8. Una jarra vacía pesa 0,64 kilos, y llena de agua, 1,728 kilos.
¿Cuánto pesa el agua?

9. Un camino tiene 600 metros de longitud y 428,5 metros están asfaltados.
¿Cuánto queda sin asfaltar?

10. De un listón que mide 3,25 metros se ha cortado un trozo de 0,56 metros.
¿Cuál es ahora la longitud del listón?

11. El tanque de gasolina de un coche tiene una capacidad de 60 litros. Si se ha llenado con 48,32 litros, ¿cuántos litros tenía el tanque?

12. Una señora lleva al mercado 2.000 ptas. para hacer la compra. Al final le sobraron 27,50 ptas.
¿Cuál fue el valor de la compra?

13. María compra 2 cuentos. Uno vale 146,50 ptas. y el otro 132,50 ptas.
Si le sobran 48,50 ptas., ¿cuánto dinero tenía María?

14. Elena se gastó 468,50 ptas. en queso y 247,50 ptas. en fruta.
Si le sobraron 180 ptas., ¿cuánto dinero tenía Elena?

15. De un depósito con agua se sacan 25,5 litros y después 12,75 litros; finalmente se sacan 8,5 litros. Al final en el depósito quedan 128 litros.
¿Qué cantidad de agua había en el depósito?

16. Un ciclista ha recorrido 145,8 km en una etapa, 136,65 km en otra etapa y 162,62 km en una tercera etapa.
¿Cuántos kilómetros le quedan por recorrer si la carrera es de 1.100 km?

17. La altura de una torre de televisión es 86,5 m. Una segunda torre mide 42,7 m más que la primera y una tercera torre mide 17,8 m menos que la segunda.
Halla la altura de las torres segunda y tercera.

1. Multiplicación y división por 10, 100 y 1.000.

$3{,}27 \times 10 = 32{,}7$

$4{,}325 \times 100 = 432{,}5$

$5{,}76 \times 1.000 = 5.760$

Multiplicación de un número decimal por 10, 100, 1.000, ...

Observa lo que ocurre cuando un número se multiplica por 10, 100, 1.000, ...

- **Al multiplicar por 10,** la coma se desplaza **un lugar** hacia la derecha.
- **Al multiplicar por 100,** la coma se desplaza **dos lugares** hacia la derecha.
- **Al multiplicar por 1.000,** la coma se desplaza **tres lugares** hacia la derecha.

Para multiplicar un número decimal por 10, 100, 1.000, ..., se desplaza la coma uno, dos, tres, ... lugares hacia la derecha y, si es necesario, se agregan ceros.

$26{,}5 : 10 = 2{,}65$

$3{,}48 : 100 = 0{,}0348$

$48{,}96 : 1.000 = 0{,}04896$

División de un número decimal por 10, 100, 1.000, ...

Observa las divisiones.

- **Al dividir por 10,** se desplaza la coma **un lugar** hacia la izquierda.
- **Al dividir por 100,** se desplaza la coma **dos lugares** hacia la izquierda.
- **Al dividir por 1.000,** se desplaza la coma **tres lugares** hacia la izquierda.

Para dividir un número decimal por 10, 100, 1.000, ..., se desplaza la coma uno, dos, tres, ... lugares hacia la izquierda.

$63 : 10 = 6{,}3$

$948 : 100 = 9{,}48$

$752 : 1.000 = 0{,}752$

División de un número natural por 10, 100, 1.000, ...

Observa las divisiones.

- **Al dividir por 10** aparece **una cifra** separada con una coma.
- **Al dividir por 100** aparecen **dos cifras** separadas con una coma.
- **Al dividir por 1.000** aparecen **tres cifras** separadas con una coma.

Para dividir un número natural por 10, 100, 1.000, ..., se separan con una coma, a partir de la derecha, una, dos, tres, ... cifras.

1. Completa:

$3{,}4 \times 100 = \ldots$	$0{,}5 : 10 = \ldots$	$6 : 10 = \ldots$	$34{,}28 : 100 = \ldots$
$0{,}25 \times 1.000 = \ldots$	$8{,}4 : 100 = \ldots$	$54 : 1.000 = \ldots$	$26{,}8 : 1.000 = \ldots$

2. Multiplicación de números decimales.

CÁLCULO EN GRAMOS

$$\begin{array}{r} 918 \\ \times\ 12 \\ \hline 1836 \\ 918 \\ \hline 11016 \end{array}$$ gramos

CÁLCULO EN KILOGRAMOS

$$\begin{array}{r} 0{,}918 \\ \times\ 12 \\ \hline 1836 \\ 918 \\ \hline 11{,}016 \end{array}$$ kilogramos

(0,918 → tres cifras decimales)

Multiplicación de un número decimal por un entero (natural)

Un litro de aceite tiene una masa de **0,918** kg.

¿Cuál es la masa de 12 litros de aceite?

Hay que multiplicar 0,918 × 12.

Observa cómo se hace esta multiplicación.

La masa de 12 litros de aceite es 11,016 kg.

Observa que del resultado se han separado igual número de cifras decimales que tiene el factor decimal 0,918 (tres cifras decimales).

Para multiplicar un número decimal por un número natural:

- **Primero, se realiza la multiplicación sin tener en cuenta la coma.**
- **Después, se separan de la derecha del producto tantas cifras decimales como tenga el factor decimal.**

$$\begin{array}{rl} 0{,}918 & \rightarrow 3 \text{ (tres cifras decimales)} \\ \times\ 1{,}42 & \rightarrow +2 \text{ (dos cifras decimales)} \\ \hline 1836 & 5 \text{ (cinco cifras decimales)} \\ 3672 & \\ 918 & \\ \hline 1{,}30356 & \end{array}$$

Multiplicación de dos números decimales

Un litro de aceite tiene una masa de **0,918** kg.

¿Cuál es la masa de 1,42 litros de aceite?

Como 0,918 = 918 gramos, multiplicamos:

$918 \times 1{,}42 = 1.303{,}56$ gramos $= 1{,}30356$ kilogramos

La masa de 1,42 litros de aceite es 1,30356 kg.

En la práctica, la multiplicación 0,918 × 1,42 se hace como se ve a la izquierda.

Para multiplicar dos números decimales:

- **Primero, se realiza la multiplicación sin tener en cuenta las comas.**
- **Después, se separan de la derecha del producto tantas cifras decimales como tengan entre los dos factores.**

1. Completa sin hacer las multiplicaciones:

Ten en cuenta que $5{,}34 \times 2{,}6 = 13{,}884$.

$534 \times 2{,}6 = \ldots$	$5{,}34 \times 2{,}6 = \ldots$	$53{,}4 \times 0{,}026 = \ldots$
$534 \times 0{,}26 = \ldots$	$0{,}534 \times 0{,}26 = \ldots$	$53{,}4 \times 2{,}6 = \ldots$

3. División de números decimales. I. Casos.

dam	m	dm	cm
2	4,	7	5

24,75 m = 2.475 cm

```
24,75 | 3
 0 7    8,25 m
   15
    0
```

Se pone coma (,) al bajar el 7

CASO 1

Cuando el dividendo es decimal y el divisor es un número entero.

Una cuerda que mide **24,75** metros se divide en tres trozos iguales.

¿Cuántos metros mide cada trozo?

Observa que 24,75 metros = 2.475 centímetros.

Por eso se divide 2.475 : 3.

2.475 : 3 = 825 cm = 8,25 m

Cada trozo mide 8,25 m.

En la práctica, la división se hace como si se tratase de números naturales.

Para dividir un número decimal por un número natural, se hace la división como si el dividendo y el divisor fueran números naturales, pero se pone una coma en el cociente al bajar la primera cifra decimal.

12 l = 1.200 cl

0,75 l = 75 cl

```
12 | 0,75
×100        ×100
1200 | 75
 450   16
  00
```

CASO 2

Cuando el dividendo es un número entero y el divisor es decimal.

¿Cuántas botellas de 0,75 litros se pueden llenar con 12 litros de agua?

Observa que 12 litros = 1.200 centilitros; 0,75 litros = 75 centilitros.

1.200 : 75 = 16

Se pueden llenar 16 botellas de 0,75 litros.

Para dividir un número natural por un número decimal, se suprime la coma del divisor y a la derecha del dividendo se ponen tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor. Después se continúa la división como si fueran números naturales.

1. Haz las divisiones siguientes:

324 | 0,6	324 | 0,12	324 | 0,018	6 | 0,4
2,25 | 15	22,5 | 15	225 | 1,5	225 | 0,15
12,96 | 6	12,96 | 18	12,96 | 9	361 | 0,19

4. División de números decimales. II. Casos.

HL
HIERROS LOPEZ. Madrid

CANTIDAD	CONCEPTO	PRECIO POR Kg.	TOTAL PESETAS
23,9 Kg	Placas de hierro	...	920,15

920,15 | 23,9

×10 ×10

9201,5 | 239
2031 38,5
1195
000

CASO 3

Cuando el dividendo y el divisor son números decimales

Observa esta factura. En ella aparece borroso el precio del kilo de hierro.

¿Cuál es el precio de un kilo de hierro?

Para averiguarlo hay que hacer la división

920,15 : 23,9

Como el divisor es decimal, lo convertimos en entero multiplicándolo por 10:

23,9 × 10 = 239

Para que el cociente no varíe se multiplica también por 10 el dividendo:

920,15 × 10 = 9.201,5

La división se hace como en el caso de dividendo decimal y divisor entero.

Luego 920,15 : 23,9 = 38,5.

El precio de un kilo de hierro es 38,5 ptas.

Para dividir dos números decimales, se suprime la coma del divisor y se desplaza la coma del dividendo tantos lugares a la derecha como cifras decimales tiene el divisor. Si es necesario se agregan ceros al dividendo.

1. Lee y resuelve:

Un coche **A** gasta 30 litros de gasolina en 300 km de recorrido. Entonces:

Número de kilómetros recorridos	:	Número de litros gastados	=	Número de kilómetros recorridos por cada litro
300	:	30	=	10

Completa la siguiente tabla para los coches **B** y **C**:

	Coche A	Coche B	Coche C
Kilómetros recorridos	300	300	300
Litros de gasolina gastados	30	20	24
Kilómetros recorridos por cada litro	300 : 30 = 10		
Litros gastados por cada kilómetro	30 : 300 = 0,1		
Litros gastados por cada 100 kilómetros	0,1 × 100 = 10		

5. Aproximación de cocientes mediante decimales.

Ⓐ

D	U
1	3 | 3
	1 m 4 m

13 m × 10 = 130 decímetros

Ⓑ

D	U	d
1	3	0 | 3
	1	0 43 dm
		1 dm

13 m × 100 = 1.300 cm

Ⓒ

D	U	d	c
1	3	0	0 | 3
	1	0	433 cm
		1	0
			1 cm

13 m × 1.000 = 13.000 mm

Ⓓ

D	U	d	c	m
1	3	0	0	0 | 3
	1	0		4333 mm
		1	0	
			1	0
				1 mm

De una cuerda que mide 13 metros se hacen tres trozos iguales.

¿Cuánto mide cada parte?

Vamos a hacer la división **13 : 3.**

Ⓐ Observa que el cociente es 4, es decir, cada parte tiene una longitud de 4 metros, pero sobra 1 metro.

Ⓑ Observa el cociente expresado en decímetros.

Al dividir 130 entre 3 se obtiene 43 dm.
Cada trozo tiene 43 dm = 4,3 m y sobra 1 dm.

Ⓒ Se puede aproximar más el cociente expresando la longitud en centímetros.

Al dividir 1.300 entre 3 se obtiene 433 cm.

Cada parte mide 433 cm = 4,33 m y sobra 1 cm.

Ⓓ Todavía se puede aproximar más el resultado expresando la longitud de la cuerda en milímetros.

Esta división indica que cada parte tiene una longitud de 4.433 mm = 4,333 m y sobra 1 mm.

El cociente 13 | 3 se ha obtenido con una aproximación hasta las milésimas.

En esta división es imposible obtener un cociente exacto, pero el cociente se puede aproximar tanto como se desee.

```
13 | 3
10 4,333
 10
  10
   1
```

En la práctica se hace una sola división.

Para hallar el cociente decimal de dos números naturales se calcula el cociente entero y se pone una coma. Después se continúa la división escribiendo un cero a la derecha de los restos que van resultando. Si el resto no llega a ser cero, se obtiene el cociente aproximado con una, dos, tres, ... cifras decimales.

1. Haz las siguientes divisiones.

Aproxima el cociente hasta las centésimas (dos cifras decimales).

23 | 3 16 | 7 25 | 6 18 | 7

Ejercicios y problemas

1. Completa:

	2,26	3,48	2,5	0,05	3	5,283
× 10 →						
× 100 →						
× 1.000 →						

2. Halla el factor que falta:

$6{,}25 \times \ldots = 625$ $\quad$ $0{,}0005 \times \ldots = 50$

$8{,}42 \times \ldots = 84{,}2$ $\quad$ $0{,}32 \times \ldots = 320$

$1{,}5 \times \ldots = 1.500$ $\quad$ $1{,}41 \times \ldots = 1.410$

$6{,}28 \times \ldots = 628$ $\quad$ $0{,}3 \times \ldots = 300$

$0{,}004 \times \ldots = 4$ $\quad$ $0{,}47 \times \ldots = 470$

3. Observa los ejemplos resueltos y completa:

Producto de decimales	Producto de los enteros más próximos	Producto aproximado
5,8 × 3,1	6 × 3 = 18	18
2,1 × 3,7	2 × 4 = 8	8
3,7 × 5,8	... × ... = ...	
9,2 × 5,9	... × ... = ...	
19,7 × 3,8	... × ... = ...	

4. Rodea con un círculo el número del conjunto que más se aproxime al producto.

Haz la estimación mediante producto de los enteros más próximos.

Productos aproximados

5,6 × 2,1 → {113, (12) 500, 6} → 6 × 2 = 12

10,8 × 4,1 → {70, 82, 44, 100} → ...

2,1 × 7,8 → {10, 16, 50, 81} → ...

9,5 × 2,02 → {20, 38, 40, 70} → ...

5. Indica el número de cifras decimales que tiene el producto en cada caso y haz las multiplicaciones.

a) 0,84 → 2
× 0,153 → +3
5 cifras

b) 0,642 → ...
× 0,487 → ...

c) 0,005 → ...
× 0,0064 → ...

d) 5,28 → ...
× 0,06 → ...

6. Indica en cada división si se ha de multiplicar por 10, por 100, por 1.000, etc., para conseguir un divisor entero. Después haz las divisiones.

División	Factor conveniente	Nueva división
0,428 | 0,4	10	4,28 | 4
28,9 | 0,17		
0,64 | 0,8		
128 | 0,16		

7. Haz las siguientes divisiones:

4,25 : 10 $\quad$ 4,25 : 100 $\quad$ 36 : 10

36 : 100 $\quad$ 36 : 1.000 $\quad$ 6,5 : 10

8. ¿Cuál es el divisor que hay que colocar en el cuadro ☐?

84 : ☐ = 8,4 $\quad$ 3,27 : ☐ = 0,327

6,81 : ☐ = 0,681 $\quad$ 34,8 : ☐ = 0,348

9. ¿Cuánto pesan 10 sacos de patatas si cada uno pesa 18,25 kilos?

10. Completa:

Desplazamiento de la coma

48,52 × 10 = 485,2 → Un lugar a la derecha

36,56 : 10 = ... → .....

46,57 × 100 = ... → .....

46,573 × 1.000 = ... → .....

11. Completa el cuadro.

Recuerda que **D = d · c; d = D : c** y que **c = D : d.**

Dividendo D	Divisor d	Cociente c
8,528	2,6	
33,75		2,7
31,4	5	
0,0387	0,45	
	72,5	13,6
103,62	8,25	

1. Sistema Métrico Decimal. El metro.

Unidades de medida

Las primeras unidades de longitud que usó el hombre estaban en relación con su cuerpo, como el **paso,** el **palmo,** la **braza,** etc.

Estas unidades tienen, entre otros, el grave inconveniente de que no son las mismas para todos. Así, la longitud de un palmo varía de un hombre a otro.

Por esta razón el hombre ideó unas unidades invariables. Algunas de estas unidades invariables son la **vara aragonesa** y la **vara castellana.**

Estas unidades, aunque invariables, no eran universales. Cada país tenía sus propias unidades e incluso dentro de un mismo país las unidades de medida eran diferentes según las regiones.

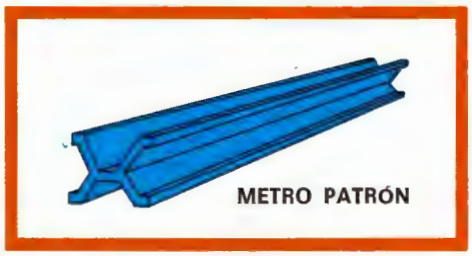
Como consecuencia del aumento de los intercambios comerciales aumentó también la necesidad de disponer de unas unidades de medida que fueran **unidades fijas, invariables y universales.**

Cuadrante dividido en diez millones de partes iguales. Cada parte es 1 metro.

Sistema Métrico Decimal. El metro

En el siglo XVIII, por iniciativa de Francia, se creó una comisión internacional de sabios con el fin de establecer un sistema de unidades con una relación decimal entre ellas. De esta manera surgió el **Sistema Métrico Decimal,** cuya unidad principal es el **metro.**

Esta comisión definió el metro como la diezmillonésima parte del cuadrante de un meridiano terrestre.



Otros científicos repitieron la medición sobre el meridiano y encontraron un resultado ligeramente diferente a los primeros.

Por eso se construyó el **metro patrón** como unidad de longitud invariable y fue aceptada por casi todos los países.

El metro es la distancia que existe entre dos trazos grabados en una barra de platino e iridio a la temperatura de cero grados centígrados que se encuentra en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de París.

2. Múltiplos y submúltiplos del metro.

Unidad principal de longitud. El metro

Para medir longitudes se emplea, como unidad principal, el **metro.**

En la vida práctica se utilizan diversos tipos de metro.

- De madera, en forma de barra rígida.
- De madera, plegable con 10 varillas.
- De acero flexible.
- De cinta.

Todos ellos tienen igual longitud que el metro patrón.

MÚLTIPLOS DEL METRO

1 dam = 10 m
1 hm = 100 m
1 km = 1.000 m
1 mam = 10.000 m

Los múltiplos del metro

El metro es una unidad demasiado pequeña para medir algunas distancias. En estos casos se utilizan los múltiplos del metro, que son unidades mayores que el metro. Colocados de mayor a menor, los múltiplos del metro son los siguientes:

miriámetro — kilómetro — hectómetro — decámetro

mam → km → hm → dam

Observa la relación entre estas unidades y el metro.

SUBMÚLTIPLOS DEL METRO

1 dm = 0,1 m
1 cm = 0,01 m
1 mm = 0,001 m

Los submúltiplos del metro

Para pequeñas distancias se necesitan unidades menores que el metro; estas unidades son los submúltiplos del metro. Estas unidades, colocadas de mayor a menor, son:

decímetro (dm), centímetro (cm), milímetro (mm)

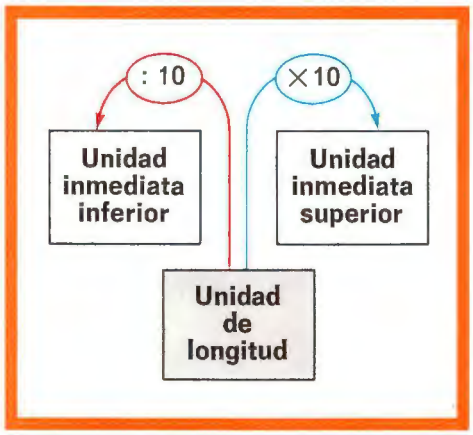
El **decímetro (dm)** es la décima parte del metro.
El **centímetro (cm)** es la centésima parte del metro.
El **milímetro (mm)** es la milésima parte del metro.

Observa la relación entre estas unidades y el metro.

1. Completa:

1 dm = **0,1** m	3 cm = **0,03** m	5 mm = **0,005** m
2 dm = ... m	4 cm = ... m	6 mm = ... m
3 dm = ... m	5 cm = ... m	7 mm = ... m

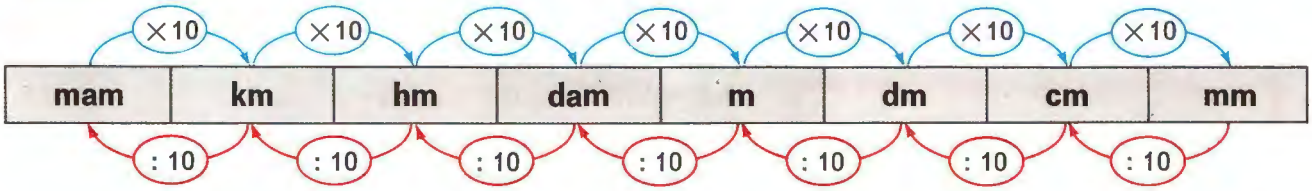
3. Relación entre las unidades de longitud.



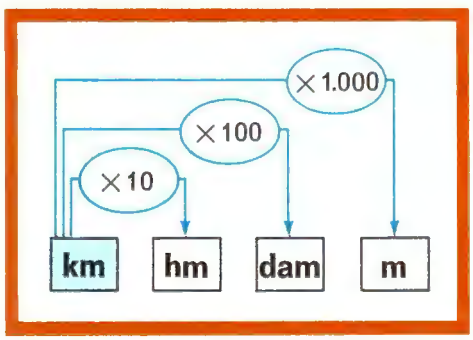
El Sistema Métrico Decimal, como su nombre indica:

- Es un **sistema,** es decir, un conjunto organizado y coherente de unidades.
- Es **métrico,** porque sus unidades se derivan del metro.
- Es **decimal,** porque la relación entre sus unidades es decimal, como la relación que existe entre las unidades del Sistema de Numeración Decimal.

Esta relación decimal queda reflejada en el esquema siguiente:

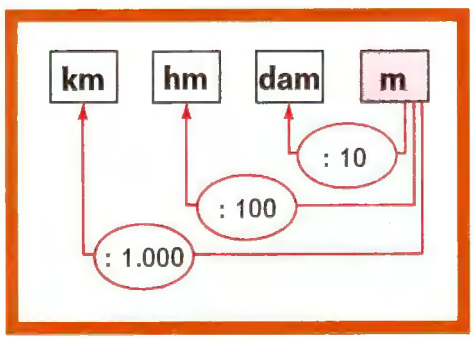


En el Sistema Métrico Decimal cada unidad de longitud es diez veces mayor que la inmediata inferior y diez veces menor que la inmediata superior.



Observa este esquema. En él se ve que para pasar de una unidad a otra inferior:

- **Se multiplica por 10** si la unidad inferior está **un lugar** a la derecha.
- **Se multiplica por 100** si la unidad inferior está **dos lugares** a la derecha.
- **Se multiplica por 1.000** si la unidad inferior está **tres lugares** a la derecha, etc.



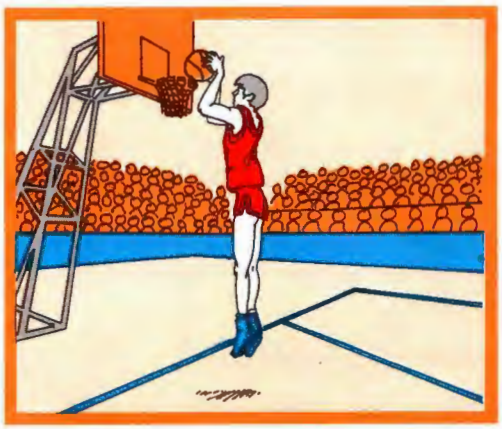
Observa ahora este otro esquema. En él se ve que para pasar de una unidad a otra superior:

- **Se divide por 10** si la unidad superior está **un lugar** a la izquierda.
- **Se divide por 100** si la unidad superior está **dos lugares** a la izquierda.
- **Se divide por 1.000** si la unidad superior está **tres lugares** a la izquierda.

1. Completa:

6 km = ... hm	4 dam = ... hm	5 hm = ... dam
8 km = ... dam	4 dam = ... km	5 hm = ... km
9 km = ... dm	4 dam = ... m	5 m = ... hm

4. Números complejos y números incomplejos.



La altura de este jugador de baloncesto es 2 metros, 13 centímetros y 8 milímetros.

La altura del jugador está expresada en **varias unidades** (m, cm, mm). Por eso se dice que 2 m, 13 cm y 8 mm es un **número complejo.**

La altura del jugador se puede expresar en cualquiera de las unidades de longitud.

Los cambios de unidad se hacen fácilmente utilizando el cuadro de unidades. En cada cuadro el trazo azul indica la unidad elegida.

Altura del jugador en metros			
m	dm	cm	mm
2	1	3	8
2,138 m			

Altura del jugador en decímetros			
m	dm	cm	mm
2	1	3	8
21,38 dm			

Altura del jugador en centímetros			
m	dm	cm	mm
2	1	3	8
213,8 cm			

Altura del jugador en milímetros			
m	dm	cm	mm
2	1	3	8
2.138 mm			

2,138 m = 21,38 dm = 213,8 cm = 2.138 mm

Las cantidades anteriores están expresadas en **una sola unidad** y se llaman **números incomplejos.**

Una cantidad expresada en distintas unidades de la misma especie se llama número complejo. Si la cantidad está expresada en una sola unidad se llama número incomplejo.

1. Escribe tres números complejos y tres incomplejos.

2. Rodea los números complejos:

25 m 2 dam y 6 m 8 hm, 4 dam y 7 m 428 dm

3. Observa el cuadro.

Expresa 2.643 m en las unidades que indica el trazo azul.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm	
2	6	4	3				2,643 km
2	6	4	3				26,43 hm
2	6	4	3				..... dam
2	6	4	3				..... m
2	6	4	3	0			..... dm
2	6	4	3	0	0		..... cm
2	6	4	3	0	0	0	..... mm

2.643 m

5. Transformación de complejos de longitud en incomplejos y viceversa.

Paso de complejo a incomplejo

¿Cuántos metros son 12 km, 34 hm, 2 dam y 6 m?

Se trata de transformar el número complejo 12 km, 34 hm, 2 dam y 6 m en incomplejo de metros.

Observa dos formas de hacerlo.

PRIMERA FORMA

Reduciendo a metros

- Se reducen a metros las cantidades y después se suman.

12 km × 1.000 → 12.000 m
34 hm × 100 → 3.400 m
2 dam × 10 → 20 m
6 m → + 6 m
15.426 m

SEGUNDA FORMA

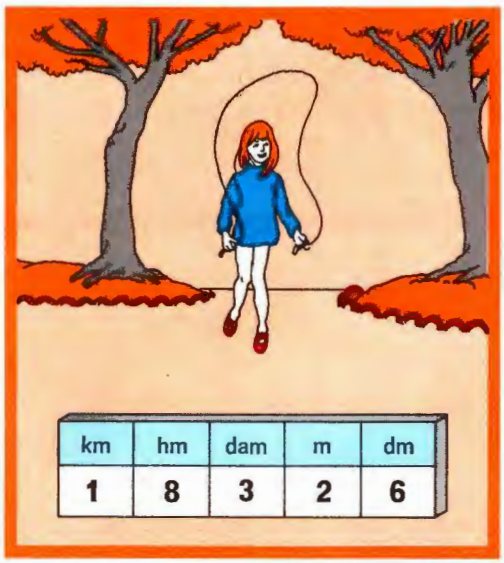
Con el cuadro de unidades

- Se escriben las diferentes cantidades en el cuadro de unidades.
- Se suman los números que están en la misma columna.

mam	km	hm	dam	m
1	2			
	3	4	2	6

→ **15.426 m**

12 km, 34 hm, 2 dam y 6 m = 15.426 m



km	hm	dam	m	dm
1	8	3	2	6

Paso de incomplejo a complejo

La cuerda con la que salta la niña mide 1,84 m.

Expresa la longitud de la cuerda en metros, decímetros y centímetros.

Colocando este número en el cuadro de unidades resulta:

m	dm	cm
1	8	4

→ **1,84 m = 1 m, 8 dm y 4 cm**

Del mismo modo, el número incomplejo **18.326** dm se descompone así:

18.326 dm = 1 km, 8 hm, 3 dam, 2 m y 6 dm

1. Expresa en metros cada uno de los siguientes complejos:

3 hm, 6 dam y 8 m 4 dam, 7 m y 8 dm

2. Expresa en forma compleja cada uno de los siguientes incomplejos de longitud:

3.864 m 865,9 dm 3.682 cm 458,4 mm

3. Lee y resuelve:

- La longitud de una viga es 732 cm.
  Expresa esta longitud en forma compleja.
- En una carretera hay un tramo en obras de 2 km, 3 hm y 6 dam.
  Expresa esta longitud en metros.

Ejercicios y problemas

1. ¿Qué indica la palabra decimal en «Sistema Métrico Decimal»?

2. Completa escribiendo la unidad:

3,25 hm
- En ... son 325.
- En ... son 3.250.
- En ... son 0,325.
- En ... son 32,5.

4,72 m
- En ... son 4.720.
- En ... son 0,472.
- En ... son 47,2.
- En ... son 472.

3. Cambia de unidad para expresar las siguientes longitudes mediante números enteros:

0,625 km 24,5 hm 36,5 dam 86,4 m 81,5 cm

4. Indica en metros cada una de las siguientes medidas:

0,52 km 0,27 hm 4 dam 0,4 dam 80 dm 85 dm

5. Escribe en forma de complejos:

3.728 m 45.736 mm 572 dam 4.873 m 6.582 cm

6. Expresa en metros los siguientes complejos:

3 km, 6 hm y 8 dam 5 km, 6 hm y 8 dam 4 hm, 6 dam y 8 m

7. Observa cómo se suman y cómo se restan medidas de longitud:

SUMA:

En forma compleja:

$$\begin{array}{r} 3\text{ hm}\ \ 4\text{ dam}\ \ 6\text{ m} \\ +\ 1\text{ hm}\ \ 8\text{ dam}\ \ 3\text{ m} \\ \hline 4\text{ hm}\ \ 12\text{ dam}\ \ 9\text{ m} \\ 5\text{ hm}\ \ 2\text{ dam}\ \ 9\text{ m} \end{array}$$

En forma incompleja:

$$\begin{array}{r} 346\text{ m} \\ +\ 183\text{ m} \\ \hline 529\text{ m} \end{array}$$

RESTA:

En forma compleja:

$$\begin{array}{r} 4\text{ hm} \\ -\ 1\text{ hm}\ \ 5\text{ dam}\ \ 6\text{ m} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3\text{ hm}\ \ 10\text{ dam} \\ -\ 1\text{ hm}\ \ 5\text{ dam}\ \ 6\text{ m} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3\text{ hm}\ \ 9\text{ dam}\ \ 10\text{ m} \\ -\ 1\text{ hm}\ \ 5\text{ dam}\ \ 6\text{ m} \\ \hline 2\text{ hm}\ \ 4\text{ dam}\ \ 4\text{ m} \end{array}$$

En forma incompleja:

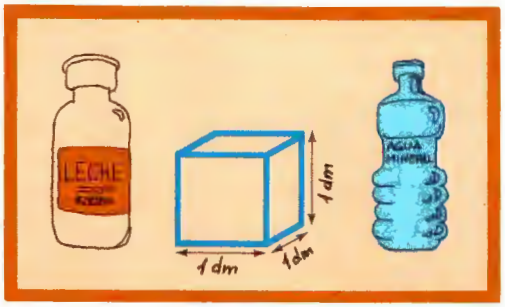
$$\begin{array}{r} 4\text{ hm} \\ -\ 1\text{ hm}\ \ 5\text{ dam}\ \ 6\text{ m} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 400\text{ m} \\ -156\text{ m} \\ \hline 244\text{ m} \end{array}$$

Efectúa las operaciones indicadas:

$$\begin{array}{r} 3\text{ km}\ \ 6\text{ hm}\ \ 2\text{ m} \\ +\ 2\text{ km}\ \ 8\text{ hm}\ \ 6\text{ m} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\text{ km}\ \ 8\text{ hm}\ \ 6\text{ dam}\ \ 4\text{ m} \\ +\ 4\text{ km}\ \ 2\text{ hm}\ \ 1\text{ dam}\ \ 7\text{ m} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\text{ hm}\ \ 8\text{ dam}\ \ 6\text{ m} \\ +\ 5\text{ hm}\ \ 4\text{ dam}\ \ 8\text{ m} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8\text{ km}\ \ 3\text{ hm}\ \ 6\text{ dam} \\ -\ 2\text{ km}\ \ 5\text{ hm}\ \ 2\text{ dam} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\text{ hm}\ \ 2\text{ dam}\ \ 8\text{ m} \\ -\ 2\text{ hm}\ \ 7\text{ dam}\ \ 6\text{ m} \\ \hline \end{array}$$

1. Unidades de capacidad.



El litro, unidad principal de capacidad

Para medir líquidos se emplea como unidad principal el **litro.** Hay muchos recipientes que tienen 1 litro de capacidad: botellas de leche, de agua mineral, etc.

Un cubo de un decímetro de arista tiene de capacidad un litro.

El litro es la capacidad de un cubo de un decímetro de arista.

MÚLTIPLOS DEL LITRO

1 dal = 10 l
1 hl = 100 l
1 kl = 1.000 l
1 mal = 10.000 l

Los múltiplos y submúltiplos del litro

- Para medir cantidades grandes de líquidos se utilizan unidades mayores que el litro. Son los **múltiplos del litro.**

Colocados ordenadamente, los múltiplos son:

mirialitro — kilolitro — hectolitro — decalitro

mal → kl → hl → dal

Observa la relación de estas unidades con el litro.

SUBMÚLTIPLOS DEL LITRO

1 dl = 0,1 l
1 cl = 0,01 l
1 ml = 0,001 l

- Para medir cantidades pequeñas de líquidos se utilizan unidades menores que el litro. Son los **submúltiplos del litro.**

Colocados ordenadamente, los submúltiplos son:

decilitro — centilitro — mililitro

dl → cl → ml

— El **decilitro** es la décima parte del litro: **1 dl = 0,1 l.**

— El **centilitro** es la centésima parte del litro: **1 cl = 0,01 l.**

— El **mililitro** es la milésima parte del litro: **1 ml = 0,001 l.**

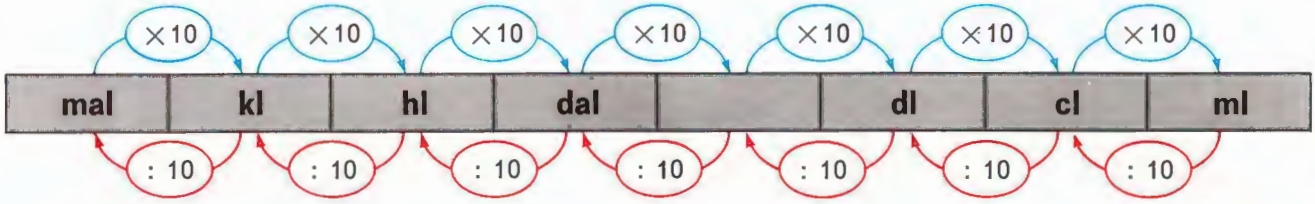
Observa la relación de estas unidades con el litro.

1. Completa:

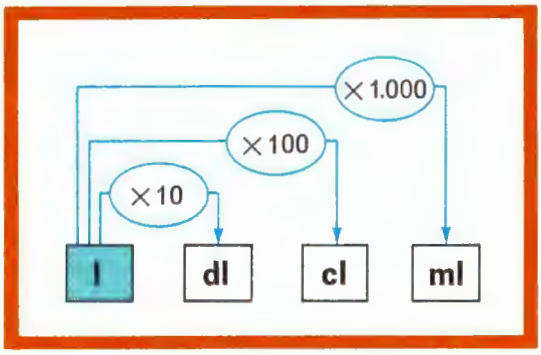
1 dl = 0,1 l	2 cl = ... l	3 ml = 0,003 l	2 l = ... dl
3 dl = ... l	3 cl = ... l	4 ml = ... l	20 l = ... dl
4 dl = ... l	4 cl = ... l	7 ml = ... l	2 l = ... cl
6 dl = ... l	6 cl = ... l	13 ml = ... l	2 l = ... ml

2. Relaciones entre las unidades de capacidad.

Entre las unidades de capacidad existe una relación decimal.

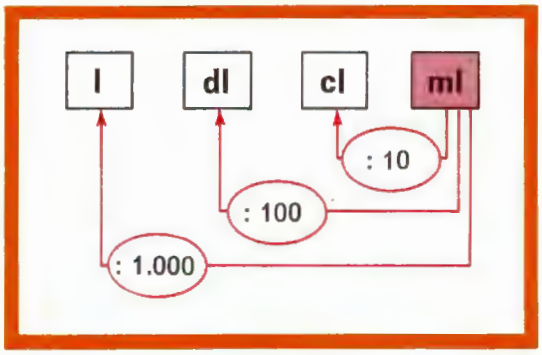


Cada unidad de capacidad es diez veces mayor que la inmediata inferior y diez veces menor que la inmediata superior.



Observa este esquema. En él se ve que para pasar de una unidad de capacidad a otra **inferior:**

- **Se multiplica por 10** si la unidad inferior está **un lugar** a la derecha.
- **Se multiplica por 100** si la unidad inferior está **dos lugares** a la derecha.
- **Se multiplica por 1.000** si la unidad inferior está **tres lugares** a la derecha.



Observa ahora este otro esquema. En él se ve que para pasar de una unidad a otra **superior:**

- **Se divide por 10** si la unidad superior está **un lugar** a la izquierda.
- **Se divide por 100** si la unidad superior está **dos lugares** a la izquierda.
- **Se divide por 1.000** si la unidad superior está **tres lugares** a la izquierda.

1. Completa:

3 kl = ... hl	4 dal : 100 → **0,04** kl	5 l : 10 → ... dal
6 kl = ... dal	5 dal : 10 →	5 l : 100 → .....
9 kl = ... dl	6 dal × 10 →	5 l : 1.000 → .....

2. Completa:

6 kl = ... hl = ... dal = ... l = ... dl = ... cl = ... ml

34.280 dl = ... l = ... dal = ... hl = ... kl = ... mal

3. Expresa en litros:

0,4 kl 25,6 hl 84 dal 8,4 dal 650 dl 3.400 cl

3. Cambio de unidad con el cuadro de unidades.

Un depósito tiene una capacidad de **3.428** litros.

Podemos expresar esta capacidad en unidades diferentes.

EN HECTOLITROS

3.428 l : 100 = 34,28 hl

kl	hl	dal	l	dl	cl
3	4	2	8		

EN DECALITROS

3.428 l : 10 = 342,8 dal

kl	hl	dal	l	dl	cl
3	4	2	8		

EN DECILITROS

3.428 l × 10 = 34.280 dl

kl	hl	dal	l	dl	cl
3	4	2	8	0	

EN CENTILITROS

3.428 l × 100 = 342.800 cl

kl	hl	dal	l	dl	cl
3	4	2	8	0	0

3.428 l = 34,28 hl = 342,8 dal = 34.280 dl = 342.800 cl

Cambiar de unidad es fácil utilizando el cuadro de unidades.

El trazo azul indica en cada caso la unidad elegida.

CUADRO DE UNIDADES

mal	kl	hl	dal	l	dl	cl	ml	
0	3	4	2	8				0,3428 mal
	3	4	2	8				3,428 kl
	3	4	2	8				34,28 hl
	3	4	2	8				342,8 dal
	3	4	2	8				3.428 l
	3	4	2	8	0			34.280 dl
	3	4	2	8	0	0		342.800 cl
	3	4	2	8	0	0	0	3.428.000 ml

1. Escribe tres complejos de capacidad y tres incomplejos de capacidad.

2. Observa el cuadro:

Expresa 328 l en las unidades que indica el trazo azul.

mal	kl	hl	dal	l	dl	cl	ml	
0	0	3	2	8				... mal
	0	3	2	8				... kl
		3	2	8				
		3	2	8				
		3	2	8				
		3	2	8	0			
		3	2	8	0	0		
		3	2	8	0	0	0	

4. Transformación de complejos de capacidad en incomplejos y viceversa.

Paso de complejo a incomplejo

Una piscina tiene una capacidad de 45 kl 28 hl 6 dal 7 l.

¿Cuál es su capacidad en litros?

El problema puede resolverse de dos formas.

PRIMERA FORMA

Reduciendo a litros

- Se reducen las cantidades a litros y se suman:

45 kl × 1.000 → 45.000 l
28 hl × 100 → 2.800 l
6 dal × 10 → 60 l
7 l → + 7 l
47.867 l

SEGUNDA FORMA

Con el cuadro de unidades

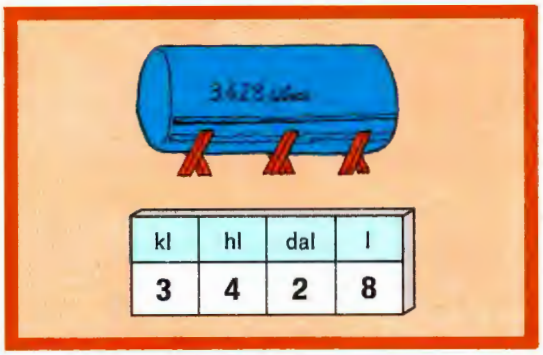
- Se escriben las diferentes cantidades en el cuadro de unidades teniendo en cuenta que cada orden ocupa un lugar.
- Se suman los números que están en la misma columna:

mal	kl	hl	dal	l
4	5			
+	2	8	6	7
4	**7**	**8**	**6**	**7**

→ **47.867 l**

45 kl 28 hl 6 dal 7 l = 47.867 l

La capacidad de la piscina es 47.867 litros.



kl	hl	dal	l
3	4	2	8

Paso de incomplejo a complejo

La capacidad de este depósito es 3.428 litros.

Para pasar este incomplejo de capacidad a complejo se coloca en el cuadro de unidades.

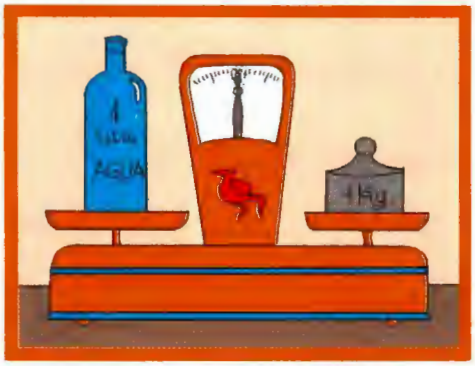
En el cuadro se ven las diversas unidades que forman este número incomplejo.

3.428 l = 3 kl 4 hl 2 dal 8 l

1. Lee y transforma:

- Expresa en litros cada uno de los siguientes complejos de capacidad:
  3 hl 6 dal 4 l 4 kl 32 hl 6 dal 6 dal 8 l 54 dl
- Expresa en forma compleja cada uno de los siguientes incomplejos de capacidad:
  2.875 l 35,6 dal 748 dl 2.864 ml
- Un tonel tiene una capacidad de 625 l. Expresa esta capacidad en forma compleja.

5. Unidades de masa.



El kilogramo y el gramo, unidades de masa

Para medir masas se emplea la balanza.

En el Sistema Internacional de Unidades (SIU) se utiliza como unidad principal de masa el **kilogramo.**

Un litro de agua pura a cuatro grados centígrados tiene una masa de 1 kilogramo.

Para que se pueda reproducir las veces que se quiera hay un kilogramo patrón.

El kilogramo patrón es un cilindro de platino e iridio que está depositado en la Oficina de Pesas y Medidas de París.

Otra unidad importante de masa es el **gramo,** que es la milésima parte del kilogramo.

1 kilogramo = 1.000 gramos { **1 kg = 1.000 g** / **1 g = 0,001 kg**

MÚLTIPLOS DEL KILOGRAMO

1 mag = 10 kg
1 q = 100 kg
1 t = 1.000 kg

SUBMÚLTIPLOS DEL KILOGRAMO

1 hg = 100 g
1 dag = 10 g
1 dg = 0,1 g
1 cg = 0,01 g
1 mg = 0,001 g

Múltiplos y submúltiplos del kilogramo

- Las unidades mayores que el kilogramo son:
  - El **miriagramo (mag),** que tiene 10 kg.
  - El **quintal métrico (q),** que tiene 100 kg.
  - La **tonelada métrica (t),** que tiene 1.000 kg.
- Las unidades menores que el kilogramo y mayores que el gramo son:
  - El **hectogramo (hg),** que tiene 100 g: **1 hg = 100 g.**
  - El **decagramo (dag),** que tiene 10 g: **1 dag = 10 g.**
- Las siguientes unidades son menores que el gramo.
  - 1 **decigramo (dg)** es la décima parte del gramo: **1 dg = 0,1 g.**
  - 1 **centigramo (cg)** es la centésima parte del gramo: **1 cg = 0,01 g.**
  - 1 **miligramo (mg)** es la milésima parte del gramo: **1 mg = 0,001 g.**

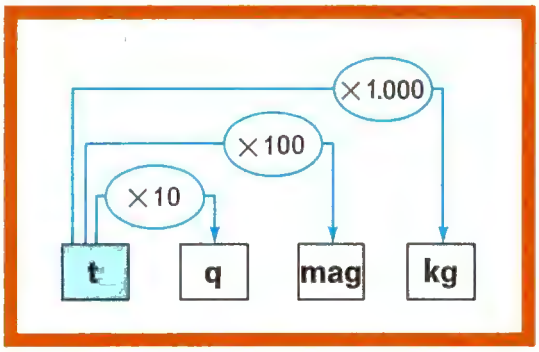
1. Completa:

2 q = ... kg	5 t = ... kg	5 dg = ... g	7 cg = ... g
4 q = ... kg	7 t = ... kg	7 dg = ... g	8 cg = ... g
6 q = ... kg	8 t = ... kg	8 dg = ... g	16 cg = ... g
3 mg = ... g	8 mg = ... g	9 mg = ... g	15 mg = ... g

6. Relaciones entre las unidades de masa.

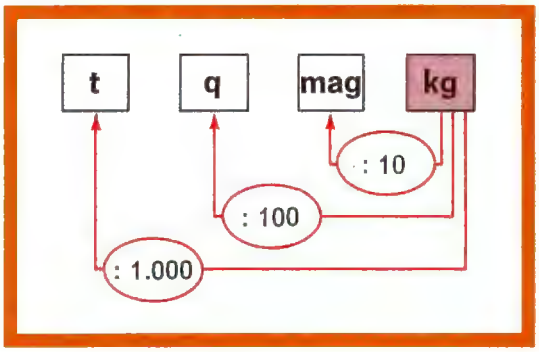
Entre las unidades de masa, como entre las de capacidad, existe una relación **decimal.**

Cada unidad de masa es diez veces mayor que la inmediata inferior y diez veces menor que la inmediata superior.



Observa este esquema. En él se ve que para pasar de una unidad de masa a otra **inferior:**

- **Se multiplica por 10** si la unidad inferior está **un lugar** a la derecha.
- **Se multiplica por 100** si la unidad inferior está **dos lugares** a la derecha.
- **Se multiplica por 1.000** si la unidad inferior está **tres lugares** a la derecha.



En este otro esquema se observa que para pasar de una unidad a otra **superior:**

- **Se divide por 10** si la unidad superior está **un lugar** a la izquierda.
- **Se divide por 100** si la unidad superior está **dos lugares** a la izquierda.
- **Se divide por 1.000** si la unidad superior está **tres lugares** a la izquierda.

1. Completa:

4 t = … q	5 q = … mag	6 q × 10 → …	8 mag = … hg
4 t = … mag	5 q = … kg	6 q × 100 → …	8 mag = … dag
4 t = … kg	5 q = … hg	6 q × 1.000 → …	8 mag = … g

0,5 kg × 10 → …	0,6 g × 10 → …	2.000 cg = … dg
0,5 kg × 100 → …	0,6 g × 100 → …	2.000 cg = … g
0,5 kg × 1.000 → …	0,6 g × 1.000 → …	2.000 cg = … dg

2. Expresa en gramos:

4.000 mg 4,5 dg 45 dg 45 cg 8 dag 0,8 dag 0,8 hg

7. Transformación de complejos de masa en incomplejos y viceversa.

Paso de complejo a incomplejo

Un bloque de mármol tiene una masa de 6 t 34 q 28 kg.

¿Cuál es su masa en kilogramos?

Observa dos formas de hacer la reducción.

PRIMERA FORMA

Reduciendo a kilogramos

- Se reducen las cantidades a kilogramos y se suman:

6 t × 1.000 → 6.000 kg
34 q × 100 → 3.400 kg
28 kg → + 28 kg
9.428 kg

SEGUNDA FORMA

Con el cuadro de unidades

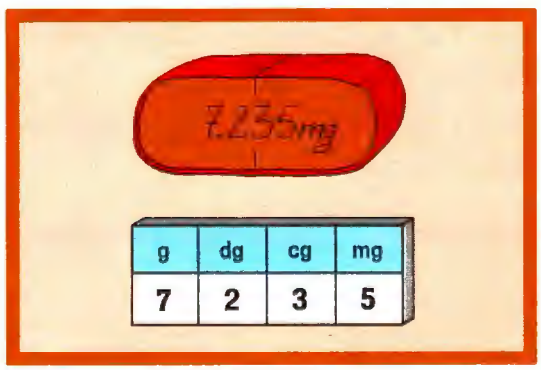
- Se escriben las diferentes cantidades en el cuadro de unidades teniendo en cuenta que cada orden ocupa un lugar.
- Se suman los números que están en la misma columna:

t	q	mag	kg
6			
+ 3	4	2	8
9	**4**	**2**	**8**

→ **9.428 kg**

6 t 34 q 28 kg = 9.428 kg

La masa del bloque de mármol es 9.428 kg.



g	dg	cg	mg
7	2	3	5

Paso de incomplejo a complejo

Esta pastilla tiene una masa de 7.235 mg.

Para pasar este incomplejo de masa a complejo se coloca en el cuadro de unidades.

En este cuadro se ven las diversas unidades que forman este número incomplejo.

7.235 mg = 7 g 2 dg 3 cg 5 mg

1. Observa y transforma:

- Expresa en kilogramos los siguientes complejos de masa:
  8 t 12 q 6 mag 4 kg 3 t 6 q 25 kg 35 kg 12 mag 75 kg
- Expresa en forma compleja cada uno de los siguientes incomplejos de masa:
  8.374 dg 36,24 kg 82,6 dag 2.864 g 2.484 dg
- Expresa en gramos los siguientes complejos de masa:
  3 hg 8 dag 70 dg 48 hg 72 dag 430 dg 7.000 mg

Ejercicios y problemas

1. Reduce a incomplejo de litros:

8 mal 36 kl 6 hl 6 kl 5 hl 8 dal 6 l 4 hl 17 dal 28 l

2. Expresa en forma compleja:

25,38 l 48,72 hl 3.524 g 583,6 dal

3. A un depósito cuya capacidad es 3.460 litros se le echan 14 hl 6 dal 18 l la primera vez, y después 53 dal y 56 l.

¿Cuántos litros le faltan para llenarse?

4. Una piscina contiene 36,3 kl de agua. Al echarle 470 hl ha quedado completamente llena.

¿Cuántos litros de agua caben en la piscina?

5. Reduce a incomplejo de gramos:

8 kg 6 hg 5 dag 9 g 15 hg 8 dag 27 g 3 hg 25 dag 7 g

6. Expresa en forma compleja:

3.428 g 75,28 kg 0,758 t 12.846 mg

7. Dieciséis litros de mercurio tienen una masa de 215,6 kg.

¿Cuál es la masa de 1 litro? ¿Y la de 1 kilolitro?

8. Cien litros de agua de mar tienen una masa de 102,5 kg.

¿Qué masa tiene 1 litro? ¿Y 1 kilolitro?

9. ¿Cuántos kilogramos son $\frac{2}{5}$ de 1 q; $\frac{3}{4}$ de 1 t; $\frac{3}{5}$ de 750 kg; $\frac{2}{3}$ de 6.000 g?

10. Escribe qué unidad es 100 veces mayor que:

a) 1 hg b) 1 kg c) 1 dag d) 1 g e) 1 mg

11. La carga de un camión es 6 t y $\frac{3}{5}$ de t. ¿Cuántos kilogramos carga el camión?

12. Las medidas de capacidad y masa se suman y se restan lo mismo que las medidas de longitud (ver página 109).

Calcula:

2 hl 6 dal 8 l	7 kl	6 dl 8 cl 4 ml
+ 4 hl 2 dal 5 l	− 2 kl 4 hl 5 l	− 2 dl 6 cl 9 ml

13. Una persona pesa 72 kilos y ha perdido en una semana 2 kilos 6 hg

¿Cuánto pesa al final de esa semana?

1. Unidades de tiempo. Sistema sexagesimal.

1 año normal = 365 días
1 año bisiesto = 366 días
1 lustro = 5 años
1 década = 10 años
1 siglo = 100 años
1 milenio = 1.000 años

Para medir el tiempo se necesitan dos cosas:

- Una unidad de tiempo.
- Un mecanismo que, por un movimiento regular, reproduzca esta unidad.

El mecanismo que se utiliza es el **reloj,** y la unidad principal de tiempo es el **segundo.**

1 segundo se escribe **1 s.**

Otras unidades de tiempo son:

El minuto **(min),** la hora, el día, el año, el lustro, el siglo, el milenio...

- **1 minuto = 60 segundos → 1 min = 60 s**
- **1 hora = 60 min = 3.600 s → 1 h = 60 min**
- **1 día = 24 horas**

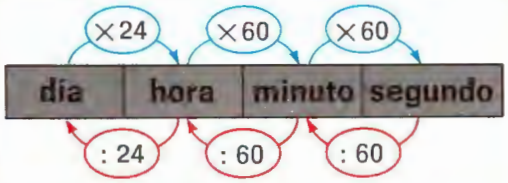
Tercer orden	Segundo orden	Primer orden
hora	minuto	segundo
3.600	60	1

Sistema sexagesimal

Los segundos, los minutos y las horas se pueden considerar como las unidades de primer orden, segundo orden y tercer orden, respectivamente, de un **sistema sexagesimal.**

En este sistema cada unidad es 60 veces mayor que la inmediata inferior.

En el sistema sexagesimal sesenta unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediato superior.



Sistema horario

Los segundos, los minutos, las horas y los días, forman el **sistema horario,** que no es completamente sexagesimal.

1. Reduce a horas, a minutos y a segundos:

a) dos años b) un año bisiesto c) dos lustros d) un siglo e) un milenio

2. Resuelve:

Una niña tiene 10 años exactos. ¿Cuántos segundos ha vivido?

2. Complejos e incomplejos de tiempo. Transformaciones.

2 h 48 min 30 s = **10.110 s**

complejo de tiempo — incomplejo de tiempo

Complejos e incomplejos

Observa dos formas de expresar el tiempo que ha tardado un avión en hacer un viaje.

Observa estos dos intervalos de tiempo.

Números complejos de tiempo son aquellos que están expresados en varias unidades de tiempo.

Números incomplejos de tiempo son aquellos que están expresados en una sola unidad de tiempo.

Paso de complejo a incomplejo

Un avión tardó en hacer el viaje 2 h 48 min 30 s.

¿Cuántos segundos duró el viaje?

Expresemos estos tiempos en segundos:

2 h × 60 = 120 min

120 min × 60 → 7.200 s
48 min × 60 → 2.880 s
30 s → + 30 s
10.110 s

El viaje del avión duró 10.110 segundos.

Paso de incomplejo a complejo

El paseo de Laura en bicicleta ha durado 7.950 segundos. Vamos a expresar esta cantidad en forma compleja en dos pasos.

PRIMER PASO

Se pasan los segundos a minutos dividiendo por 60:

7950	60
195	132 min
150	
30 s	

SEGUNDO PASO

Se pasan los minutos a horas dividiendo de nuevo por 60:

132 min	60
12 min	**2 h**

El paseo de Laura duró **2 h 12 min 30 s.**

1. Contesta:

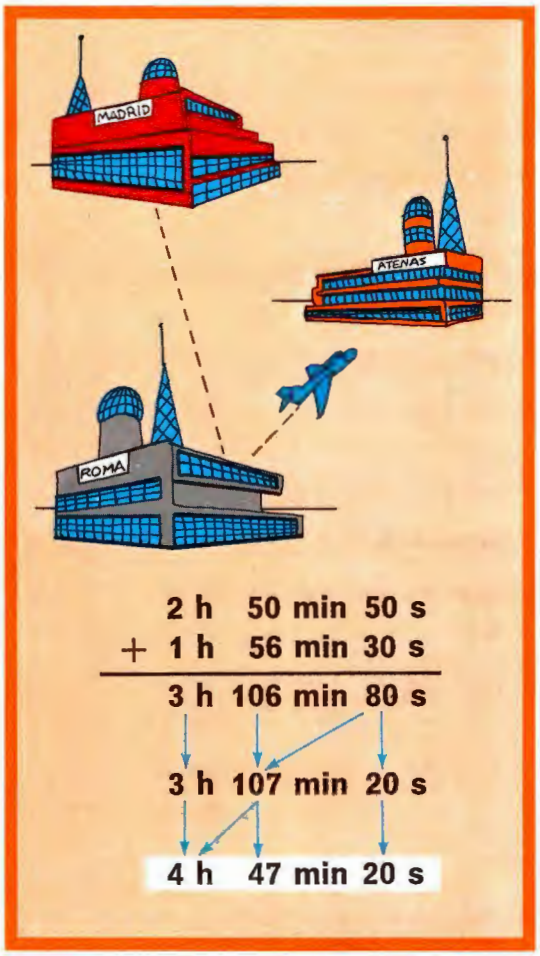
- ¿Cuántos minutos son 3 h 4 min?
- ¿Cuántos minutos son 300 s? ¿Y 3.600 s?

2. Observa estos complejos:

1 h 7 min 46 s 4 h 45 min 51 s

Exprésalos en segundos.

3. Suma en el sistema sexagesimal.



Un avión hace el vuelo de Madrid a Atenas haciendo escala en Roma.

De Madrid a Roma tarda 2 h 50 min 50 s.

De Roma a Atenas tarda 1 h 56 min 30 s.

¿Cuánto duró el vuelo de Madrid a Atenas?

Para resolver este problema hay que sumar 2 h 50 min 30 s y 1 h 56 min 30 s.

Observa cómo se hace esta suma:

1.° Se suman las unidades del mismo orden.

$$\begin{array}{rrrr} 2\text{ h} & 50\text{ min} & 50\text{ s} \\ +\ 1\text{ h} & 56\text{ min} & 30\text{ s} \\ \hline 3\text{ h} & 106\text{ min} & 80\text{ s} \end{array}$$

2.° Como los minutos y los segundos pasan de 60, se hacen las reducciones oportunas.

80 s → a minutos:

80	60
20 s	1 min

107 min → a horas:

107	60
47 min	1 h

El vuelo de Madrid a Atenas duró 4 h 47 min 20 s.

1. Calcula las siguientes sumas en el sistema sexagesimal:

$$\begin{array}{rrrr} 5\text{ h} & 46\text{ min} & 16\text{ s} \\ +\ 3\text{ h} & 57\text{ min} & 53\text{ s} \\ \hline \end{array}$$

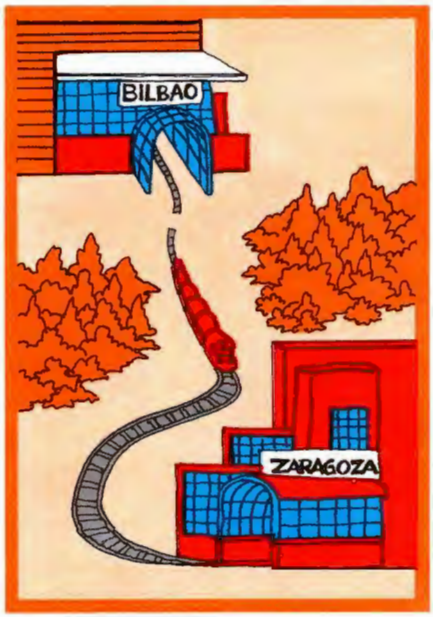
$$\begin{array}{rrrr} 3\text{ h} & 54\text{ min} & 36\text{ s} \\ +\ 16\text{ h} & 15\text{ min} & 18\text{ s} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 15\text{ h} & 55\text{ min} & 30\text{ s} \\ +\ 6\text{ h} & 25\text{ min} & 50\text{ s} \\ \hline \end{array}$$

2. Resuelve estos problemas:

- Antonio se fue al colegio a las 8 h 30 min. Permanece fuera de casa 5 h 40 min.
  ¿A qué hora regresó a casa?
- Un atleta se entrena tres días a la semana. El primer día se entrena durante 2 h 20 min 20 s; el segundo día dura el entrenamiento 1 h 56 min 30 s, y el tercer día dura 2 h 15 min 40 s.
  ¿Cuánto tiempo dedicó el atleta a entrenarse cada semana?
- Antonio dedica cada día 1 h 20 min a tocar la guitarra, 1 h 45 min a leer cuentos y 1 h 30 min a jugar al fútbol.
  ¿Cuánto tiempo dedica Antonio cada día a todas las actividades mencionadas?
- La primera parte de un viaje duró 3 h 20 min 40 s y la segunda parte 2 h 50 min 20 s.
  ¿Cuánto duró el viaje?

4. Resta en el sistema sexagesimal.



Un tren sale de la estación de Bilbao a las 8 h 45 min 15 s, y llega a la estación de Zaragoza a las 12 h 30 min 10 s.

¿Cuánto tiempo ha tardado el tren en ir de Bilbao a Zaragoza?

Hay que restar 12 h 30 min 10 s y 8 h 45 min 15 s.

Como el número de minutos y de segundos del minuendo es inferior al número de minutos y de segundos del sustraendo, se transforma el minuendo.

1.° Se convierte una hora en minutos y un minuto en segundos.

12 h 30 min 10 s → 11 h 90 min 10 s → 11 h 89 min 70 s

2.° Con el minuendo así transformado, se hace la resta.

$$\begin{array}{r} 12\text{ h }30\text{ min }10\text{ s} \\ -\ \ 8\text{ h }45\text{ min }15\text{ s} \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 11\text{ h }89\text{ min }70\text{ s} \\ -\ \ 8\text{ h }45\text{ min }15\text{ s} \\ \hline 3\text{ h }44\text{ min }55\text{ s} \end{array}$$

El tren ha tardado 3 h 44 min 55 s en ir de Bilbao a Zaragoza.

1. Haz las sustracciones o restas siguientes:

$$\begin{array}{r} 7\text{ h }20\text{ min }15\text{ s} \\ -\ 2\text{ h }40\text{ min }12\text{ s} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\text{ h }13\text{ min }8\text{ s} \\ -\ 3\text{ h }40\text{ min }36\text{ s} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15\text{ h }30\text{ min }40\text{ s} \\ -\ 12\text{ h }20\text{ min }10\text{ s} \\ \hline \end{array}$$

2. Resuelve estos problemas:

- Si son las 8 h 24 min 30 s, ¿de cuánto tiempo disponemos si tenemos que estar en el aeropuerto a las 9 h 15 min?
- De la estación **A** a la estación **B** hay los trenes que se indican.

Estación de salida **A**	6 h 30 min	7 h 45 min	7 h 18 min
Estación de llegada **B**	11 h 45 min	12 h 32 min	11 h 5 min

¿Cuál es el tren más rápido?
¿Cuánto tarda cada tren en hacer el recorrido?

- Una persona salió de viaje a las 11 h 30 min y llegó a su destino a las 14 h 10 min. ¿Cuánto tiempo duró el viaje?

3. Completa las restas:

$$\begin{array}{r} 8\text{ h} \\ -\ 3\text{ h }35\text{ min }50\text{ s} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\text{ h }59\text{ min }60\text{ s} \\ -\ 3\text{ h }35\text{ min }50\text{ s} \\ \hline \end{array}$$

5. Unidades monetarias. La peseta, unidad monetaria española.

Unidades monetarias

En los cuadros siguientes aparecen las unidades monetarias de algunos países.

PAÍSES	UNIDAD MONETARIA
Francia	franco francés
Portugal	escudo
Italia	lira

PAÍSES	UNIDAD MONETARIA
Alemania	marco
EE. UU.	dólar
U.R.S.S.	rublo
Inglaterra	libra

En todos los países hay monedas metálicas y monedas de papel. Las monedas de papel se llaman billetes.

La peseta, unidad monetaria española

En España la unidad monetaria es la **peseta (pta.)**

Hay monedas metálicas de 1 peseta, 5 pesetas, 25 pesetas, 50 pesetas y 100 pesetas, y billetes de 100, 500, 1.000 y 5.000 pesetas.

Los precios de los objetos se suelen expresar en pesetas. Pero cualquier cantidad de pesetas se puede expresar en otra unidad haciendo la división correspondiente.

Así, para pasar de pesetas a billetes de 1.000 se divide por 1.000.

1. Lee y resuelve:

- He cobrado 250.000 ptas. en billetes de 5.000 ptas.
  ¿Cuántos billetes me han dado?

- Un señor ingresa en el Banco 12 billetes de 5.000 ptas., 7 billetes de 1.000 y 13 billetes de 100.
  ¿Qué cantidad ha ingresado?

- Un señor cobra en el Banco 350.000 ptas. Recibe 140 billetes de 1.000 ptas. y el resto en billetes de 5.000 ptas.
  ¿Cuántos billetes de 5.000 pesetas le dan?

Cálculo mental, cálculo rápido

1. ¿Cuántos segundos son 3 minutos? ¿Y 5 minutos?

2. ¿Cuántos minutos son 5 horas? ¿Y 8 horas?

3. ¿Cuántos días son 6 semanas? ¿Y 10 semanas?

4. ¿Cuántos años son 7 siglos? ¿Y 10 siglos?

5. ¿Cuántas pesetas son 3 billetes de 5.000 pesetas? ¿Y 8 billetes de 5.000 pesetas?

6. ¿Cuántas pesetas son 6 billetes de 1.000 pesetas? ¿Y 5 billetes de 100 pesetas?

Ejercicios y problemas

1. ¿Cuántos segundos tiene 1 día? ¿Y 7 días?

2. ¿Cuántos años tienes? ¿Y días? ¿Y horas? ¿Y minutos?

3. Luis ha calculado que su edad es 315.360.000 segundos. ¿Cuántos años tiene Luis?

4. Expresa en segundos:

   4 h 13 min 12 s 5 h 17 min 182 s 13 h 24 min 16 s

5. Efectúa las siguientes sumas:

   2 h 18 min 18 s + 3 h 55 min 54 s 6 h 13 min 28 s + 3 h 56 min 48 s

   6 h 12 min 54 s + 3 h 50 min 38 s 13 h 27 min 46 s + 15 h 43 min 56 s

6. Efectúa las siguientes restas:

   5 h − 3 h 20 min 15 s 7 h − 2 h 54 min 18 s

   6 h 13 min 24 s − 2 h 24 min 56 s 8 h 12 min 13 s − 4 h 28 min 46 s

7. En la siguiente tabla se dan los tiempos empleados por cuatro ciclistas en las tres primeras etapas de una carrera:

	Ciclista A	Ciclista B	Ciclista C	Ciclista D
Primera etapa	6 h 25 min 15 s	6 h 30 min 46 s	5 h 48 min 50 s	6 h 13 min 45 s
Segunda etapa	7 h 12 min 38 s	6 h 18 min 30 s	6 h 45 min 30 s	7 h 12 min 43 s
Tercera etapa	7 h 55 min 48 s	7 h 10 min 40 s	7 h 58 min 13 s	6 h 15 min 50 s

   Calcula:

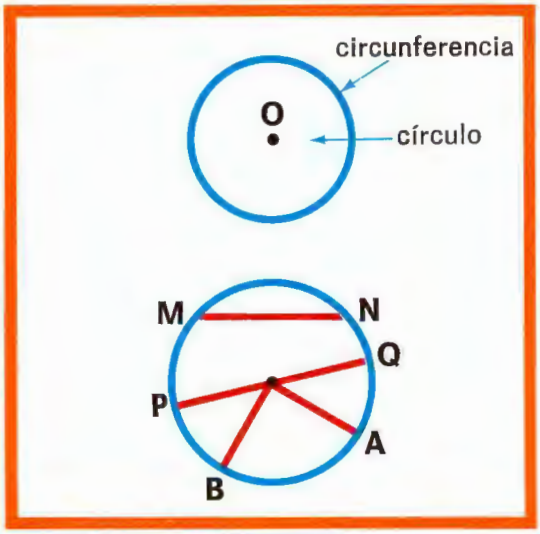
   a) El tiempo de cada uno de los ciclistas en las tres etapas.

   b) Ordénalos de menor a mayor tiempo, tal como quedaron clasificados.

8. El día 16 de julio de 1969 a las 12 h 7 min salió de la Tierra hacia la Luna el «Apolo XI». 4 días 15 h y 49 min más tarde, el astronauta Neil Armstrong ponía por primera vez sus pies en el suelo lunar.

   ¿Qué día y a qué hora tuvo lugar este acontecimiento histórico?

1. Circunferencia y círculo. Radio, cuerda y diámetro.



Circunferencia y círculo

La forma más usual de trazar una circunferencia es utilizando el compás.

Observa la circunferencia de centro **O.**

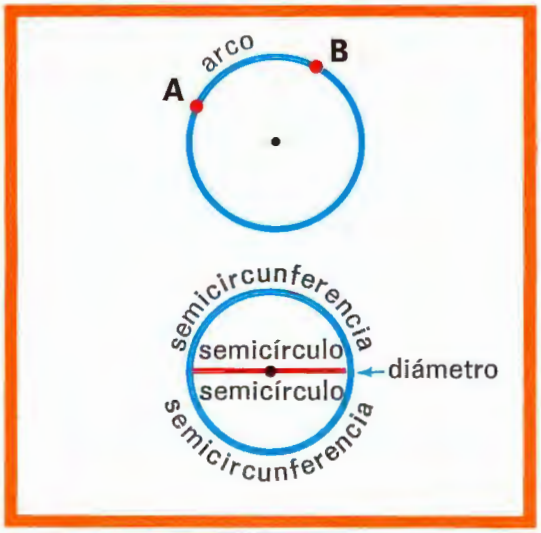
La circunferencia, junto con su interior, es un **círculo.**

Los segmentos **OA** y **OB** son **radios** de la circunferencia.

El segmento **MN** es una **cuerda.**

La cuerda **PQ** que pasa por el centro se llama **diámetro.**

Circunferencia es una línea curva y plana que tiene la propiedad de que todos sus puntos distan igual del centro.
Círculo es la parte de plano limitado por la circunferencia.
Cuerda es un segmento que une dos puntos de la circunferencia.
Diámetro es una cuerda que pasa por el centro. Un diámetro es igual a dos radios.



Arco. Semicircunferencia y semicírculo

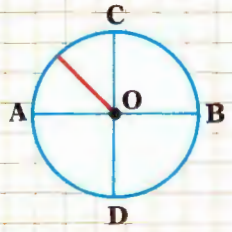
Dos puntos **A** y **B** dividen a una circunferencia en dos partes llamadas **arcos.**

Un diámetro divide a la circunferencia en dos arcos iguales llamados **semicircunferencias.**

Cada semicircunferencia mide un ángulo llano, es decir, 180°.

Un diámetro también divide al círculo en dos partes iguales llamadas **semicírculos.**

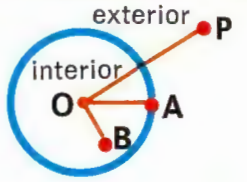
1. Observa el siguiente círculo dividido en 4 partes iguales por dos diámetros perpendiculares. Cada una de estas partes iguales es un cuadrante.



¿Cuántos grados tiene el arco correspondiente a un cuadrante?

Si se traza la bisectriz del ángulo **AOC**, ¿cuánto mide cada uno de los ángulos que se forman?

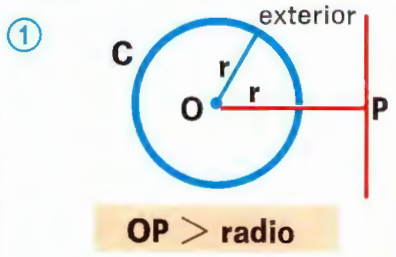
2. Posiciones de un punto y de una recta respecto de una circunferencia.



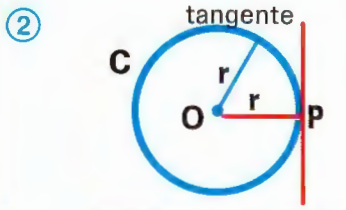
Segmento OP > radio
Segmento OA = radio
Segmento OB < radio

Posiciones de un punto respecto de una circunferencia

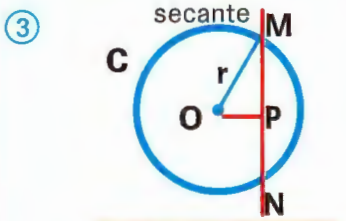
- El punto **P** es **exterior** y su distancia al centro es mayor que el radio.
- El punto **A** está en la circunferencia y su distancia al centro es igual al radio.
- El punto **B** es **interior** y su distancia al centro es menor que el radio.



OP > radio



OP = radio



OP < radio

Posiciones de una recta respecto de una circunferencia

① **La recta r es exterior a la circunferencia C.**

En este caso:

- La recta no tiene puntos comunes con la circunferencia: $r \cap C = \varnothing$.
- La distancia del centro a la recta es mayor que el radio.

② **La recta r es tangente a la circunferencia C.**

En este caso:

- La recta tiene un punto común **P** con la circunferencia, que se llama **punto de contacto:** $r \cap C = \{P\}$.
- La distancia del centro a la recta es igual al radio.

③ **La recta r es secante a la circunferencia C.**

En este caso:

- La recta y la circunferencia tienen dos puntos comunes: $r \cap C = \{M, N\}$.
- La distancia del centro a la recta es menor que el radio.

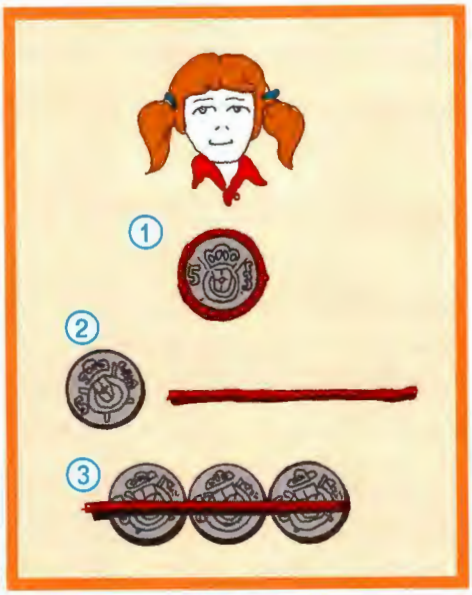
1. Resuelve estos problemas:

- Una circunferencia tiene 6 metros de radio. Luis se encuentra a 75 dm del centro, Ana a 360 cm del centro y Magdalena a 6.000 mm del centro.
  ¿Dónde está Luis, en la circunferencia, dentro o fuera de ella?
  ¿Dónde está Ana, en la circunferencia, dentro o fuera de ella?
  ¿Dónde está Magdalena, en la circunferencia, dentro o fuera de ella?
- Si una recta y una circunferencia no tienen ningún punto común, ¿qué posición tiene la recta respecto a la circunferencia?
- Si una recta y una circunferencia tienen sólo un punto común, ¿cómo se llama esa recta?

3. Longitud de la circunferencia. I.

Observa lo que hace este hombre para medir la longitud del borde de la rueda de un coche.

El trozo de cordel que ha quedado en contacto con la rueda, es la longitud de la circunferencia de la rueda.



Observa la experiencia que ha realizado Ana.

① Ha colocado un cordel pegado sobre el borde de una moneda.

② Ha extendido el trozo de cordel que ha pegado a la moneda.

③ Ha comprobado que el trozo de cordel mide 3 veces el diámetro de una moneda y un poco más.

Esta experiencia indica que la circunferencia contiene el diámetro 3 veces y algo más.

Realizando experiencias como la anterior con otras circunferencias se comprueba que siempre ocurre lo mismo, que:

longitud de la circunferencia : diámetro = 3,1416...

Este número decimal **3,1416...** se designa con la letra griega π que se lee «**pi**».

La fórmula anterior se puede escribir también así:

$$\frac{\text{longitud de la circunferencia}}{\text{diámetro}} = \pi$$

o también se puede escribir así:

longitud de la circunferencia = diámetro $\times \pi$

$$L = d \times \pi$$

FÓRMULA DE LA LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

$$L = d \times \pi$$

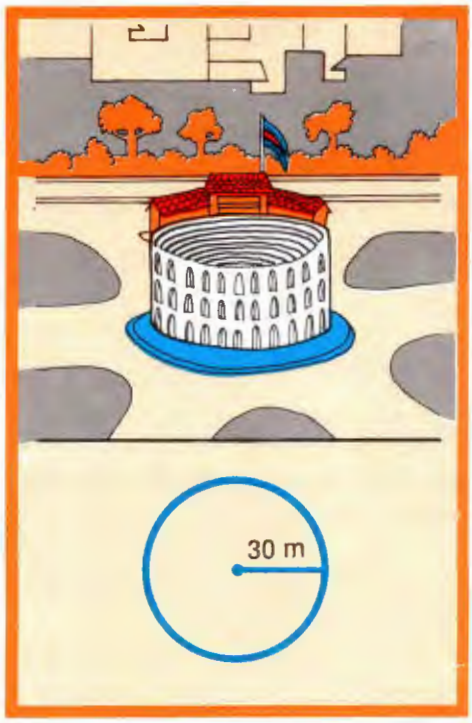
L = longitud de la circunferencia

d = longitud del diámetro

π = 3,1416...

La longitud de una circunferencia es igual al producto de su diámetro por π, o sea, por 3,1416.

4. Longitud de la circunferencia. II.



PROBLEMA A

Dado el radio o el diámetro, calcular la longitud de la circunferencia

Si queremos saber la longitud que ha de tener la valla de esta plaza de toros, no es necesario colocar la cinta métrica por el borde para medir su longitud.

Basta medir el radio o el diámetro.

¿Cuánto mide la valla si el radio mide 30 metros?

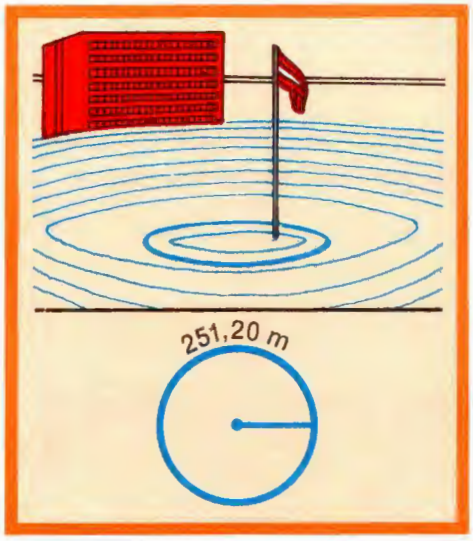
El diámetro medirá 60 metros:

$$\mathbf{d} = 2 \times \mathbf{r} = 2 \times 30 = 60 \text{ metros}$$

Aplicando la fórmula $\mathbf{L} = \mathbf{d} \times \pi$ y tomando 3,14 como valor aproximado de π, resulta:

$$\mathbf{L} = 60 \times \pi = 60 \times 3{,}14 = 188{,}40 \text{ metros}$$

La valla mide 188,40 metros.



PROBLEMA B

Sabiendo la longitud de la circunferencia, hallar lo que mide el diámetro o el radio.

El borde de una pista circular mide 251,20 m.

¿Cuánto mide el radio de la pista?

La fórmula $\mathbf{L} = \mathbf{d} \times \pi$ se puede escribir así:

$$\mathbf{d} = \mathbf{L} : \pi, \quad \text{o bien:} \quad \mathbf{d} = \frac{\mathbf{L}}{\pi}$$

La división es: 251,20 : 3,14 = 80 m.

Luego **d** = 80 m y **r** = 80 : 2 = 40 m.

El radio de la pista mide 40 metros.

1. Traza una circunferencia de 3 cm de radio.

¿Cuál es la longitud de esta circunferencia?

2. Contesta:

Cada rueda de una bicicleta tiene un radio de 30 cm.

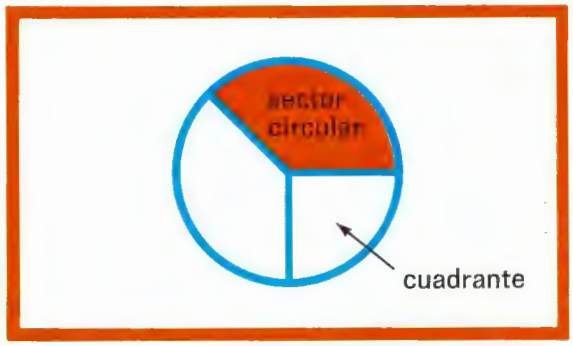
¿Cuánto avanza en cada vuelta? ¿Cuál es la longitud de esta circunferencia?

3. Traza una circunferencia de 4 cm de radio y halla su longitud.

Traza dos diámetros perpendiculares.

¿Qué longitud tiene cada uno de los cuadrantes?

5. Figuras circulares.



El sector circular es la parte de círculo comprendida entre dos radios y su arco.

El sector circular formado por dos radios perpendiculares es un **cuadrante.**

El segmento circular es la parte de círculo comprendida entre una cuerda y su arco.

Una cuerda divide el círculo en dos segmentos circulares.

La corona circular es la parte de círculo comprendida entre dos circunferencias concéntricas.

El semicírculo, el sector circular, el segmento circular y la corona circular son figuras circulares.

1. Dibuja una circunferencia con un compás y traza dos radios.

De las dos partes en que se ha dividido el círculo, colorea de azul la menor y de rojo la mayor.

¿Cómo se llama cada una de estas partes?

2. Dibuja una circunferencia y traza una cuerda.

¿Cómo se llaman las dos partes en que queda dividido el círculo?

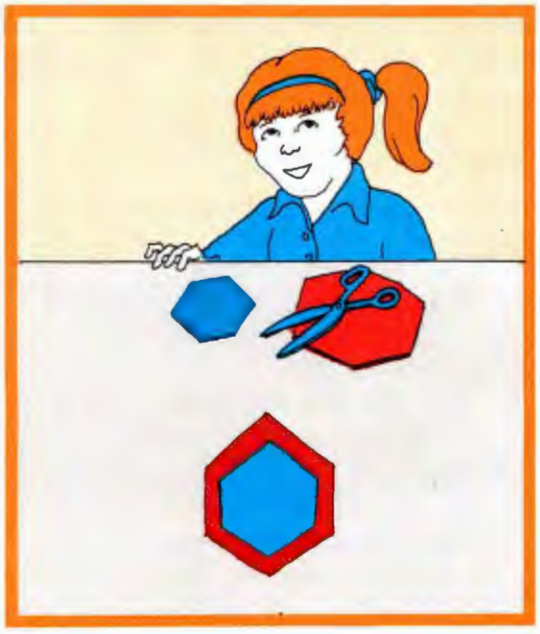
3. Traza una circunferencia y después otra circunferencia con el mismo centro.

¿Cómo se llaman estas circunferencias?

Colorea la parte comprendida entre las dos circunferencias.

¿Cómo se llama esta parte de círculo que has coloreado?

6. Medir superficies mediante la cuadrícula.



Elena ha recortado dos polígonos en cartulina.

Después los ha superpuesto. Así Elena observa que el polígono rojo tiene más superficie que el polígono azul.

Cuando las figuras tienen distinta forma, en general, no se pueden comparar las superficies superponiéndolas.

En estos casos conviene medir la superficie de las figuras con una **unidad.**

Elena y Aurora han escrito las iniciales de sus nombres sobre una cuadrícula.

¿Cuál de las dos letras ocupa más superficie?

Para saber cuál de las dos letras ocupa mayor superficie se cuentan los cuadrados (□) que ocupa cada letra.

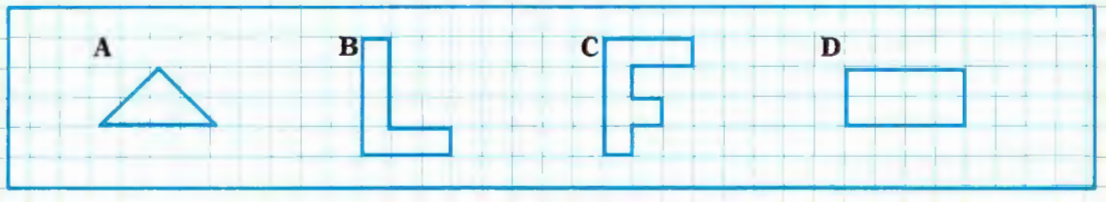
La letra E ocupa 20 cuadrados.

La letra A ocupa 24 cuadrados.

La letra A ocupa más superficie que la letra E.

1. Observa las figuras que hay en la cuadrícula.

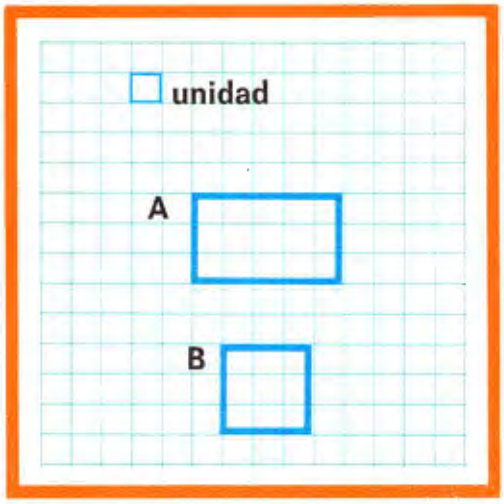
- Cuenta los cuadrados que ocupa cada figura y completa con las palabras «más», «menos» o «igual», según corresponda.



La figura **A** tiene ... superficie que la figura **B.**
La figura **B** tiene ... superficie que la figura **C.**
La figura **C** tiene ... superficie que la figura **D.**
La figura **A** tiene ... superficie que la figura **D.**

- ¿Cuál de las cuatro figuras tiene más superficie?
- Dibuja un rectángulo que tenga más superficie que cada una de estas figuras.

7. Área de una figura plana.



Para medir la superficie del rectángulo **A** y la del cuadrado **B** vamos a tomar como unidad el cuadrado de la cuadrícula (□).

Entonces resulta:

- La medida de la superficie del rectángulo **A** es 15 cuadrados.
- La medida de la superficie del cuadrado **B** es 9 cuadrados.

Los números 15 y 9 son las áreas del rectángulo y del cuadrado, respectivamente, cuando se toma por unidad el cuadrado (□) de la cuadrícula.

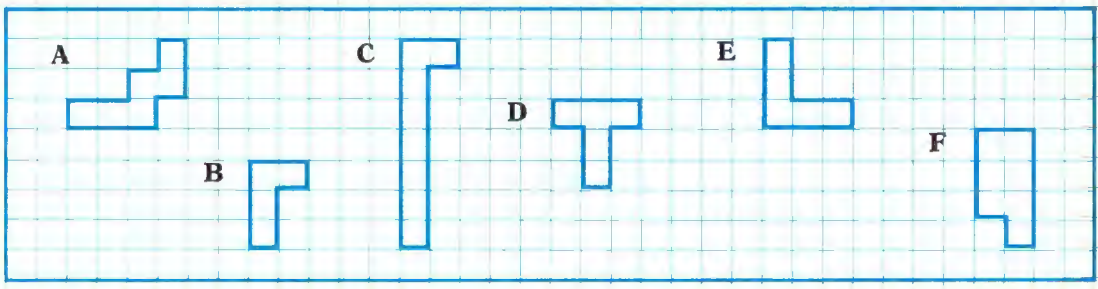
Acabamos de ver que fijada la unidad de superficie, se puede medir la superficie de una figura.

En lugar de decir «la medida de la superficie del rectángulo **A** es 15», diremos: «el **área** del rectángulo **A** es 15».

El área del rectángulo es, pues, la medida de su superficie.

El área de una figura es la medida de su superficie.

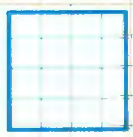
1. Observa el dibujo:



Averigua las figuras que tienen la misma superficie y coloréalas del mismo color.

Si se toma como unidad el cuadrado de la cuadrícula, ¿cuál es el área de las figuras anteriores?

2. Dibuja tres figuras que tengan más área que el cuadrado y otra que tenga menos área que el cuadrado.



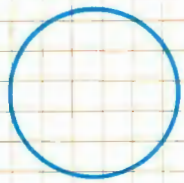
Ejercicios y problemas

1. Traza con el compás una circunferencia de radio 5 cm.

¿Cuánto medirá una cuerda que pase por el centro de esta circunferencia?

¿Cuál es la longitud de esta circunferencia?

2. Observa esta circunferencia:



a) Mide la longitud de un diámetro.

b) Calcula su longitud.

3. El radio de una moneda mide 1,5 cm.

¿Cuál es la longitud de su borde?

4. En una pista circular de 100 metros de radio un coche ha dado 80 vueltas.

¿Cuántos kilómetros ha recorrido el coche?

5. Las ruedas de un coche tienen 30 cm de radio.

¿Cuál es la longitud de la rueda?

¿Cuánto avanza en cada vuelta?

¿Cuántas vueltas tiene que dar cada rueda para recorrer una distancia de 18.840 m?

Toma $\pi = 3{,}14$.

6. Dibuja en una circunferencia dos radios. Colorea de rojo el sector angular menor que se ha formado.

7. Dibuja dos circunferencias concéntricas y colorea la parte del plano comprendida entre ellas.

¿Qué nombre recibe la parte que has coloreado?

8. Si la distancia de una recta al centro de una circunferencia es igual al radio, ¿qué posición ocupa la recta respecto de la circunferencia?

9. ¿Son iguales todos los radios de una circunferencia? ¿Y todos los diámetros? ¿Y todas las cuerdas?

10. ¿Cuántos ángulos rectos tiene una circunferencia?

11. ¿Cuántos grados tiene una circunferencia? ¿Y minutos?

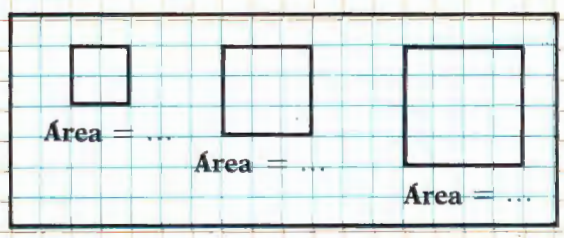
12. La longitud de una circunferencia que tiene 6 cm de radio es 37,68 cm.

¿Cuál es la longitud de otra circunferencia que tenga de radio el doble que la anterior?

13. Cuenta el número aproximado de cuadrados que ocupan Asturias, Galicia, Andalucía y Cataluña.

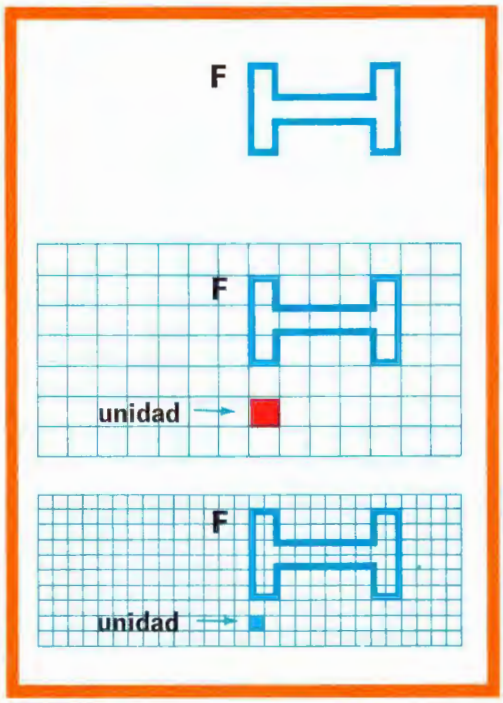
Ordénalas de mayor a menor superficie.

14. Si se toma como unidad el cuadrado de la cuadrícula, indica el área de cada cuadrado.



¿Cuál es el cuadrado de mayor área?

1. Unidades de superficie.



Necesidad de unidades universales

Observa la figura **F**.

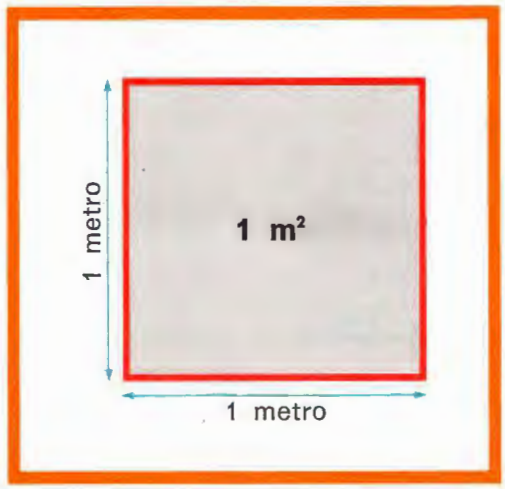
Vamos a ver que la medida de la superficie **F** depende de la unidad empleada.

- Utilizando la cuadrícula en la que la unidad de medida es el cuadrado rojo, el área de **F** es 9.
- Utilizando la cuadrícula en la que la unidad es el cuadrado azul, el área de **F** es 36.

Como las cuadrículas varían de unas a otras es necesario tener unidades de superficie que sean invariables y que tengan validez universal.

Éstas son las **unidades universales de superficie.**

El área de una superficie depende de la unidad de superficie utilizada. Al expresar el área de una superficie es necesario indicar la unidad de medida.



El metro cuadrado. Los múltiplos y submúltiplos

La **unidad principal** de las medidas de superficie es el **metro cuadrado.**

Un metro cuadrado se escribe **1 m².**

El metro cuadrado es la superficie de un cuadrado de un metro de lado.

Para medir ciertas superficies, unas veces el metro cuadrado es una unidad demasiado pequeña y otras veces es una unidad demasiado grande. Por eso se utilizan los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado.

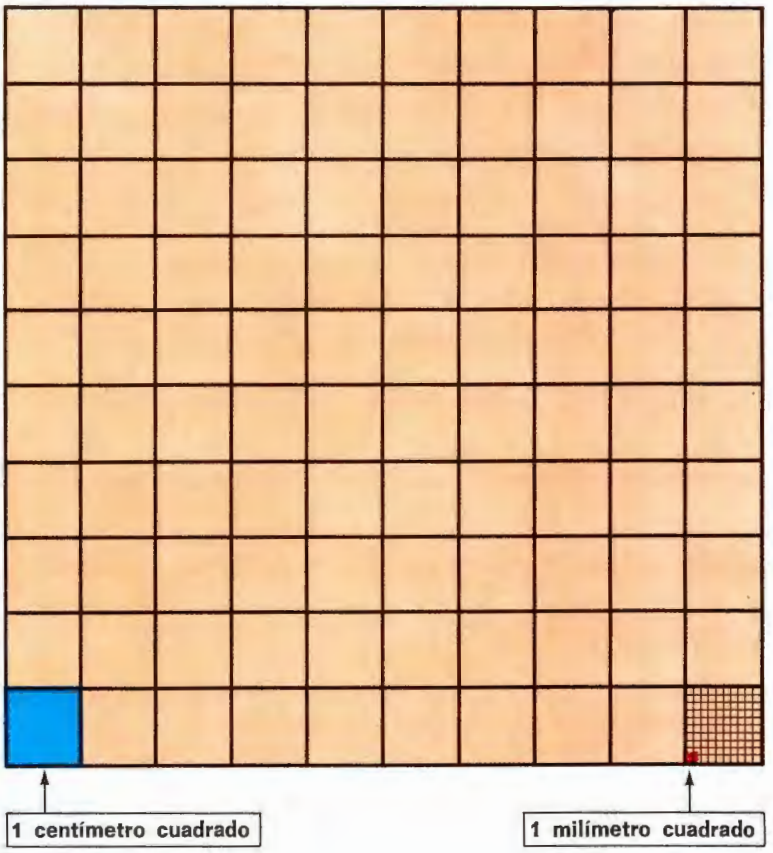
Los múltiplos del m² son:

- **decámetro cuadrado (dam²)** = 100 m²
- **hectómetro cuadrado (hm²)** = 10.000 m²
- **kilómetro cuadrado (km²)** = = 1,000.000 de m²
- **miriámetro cuadrado (mam²)** = = 100,000.000 de m²

Los submúltiplos del m² son:

- **decímetro cuadrado (dm²)** = 0,01 m²
- **centímetro cuadrado (cm²)** = 0,0001 m²
- **milímetro cuadrado (mm²)** = 0,000001 m²

2. Relaciones entre las unidades de superficie.



El cuadrado grande es 1 **decímetro cuadrado.**

- Está dividido en cuadrados más pequeños que tienen 1 centímetro de lado.

  Cada uno de estos cuadrados es 1 **centímetro cuadrado.**

- Uno de estos centímetros cuadrados se ha dividido, a su vez, en 100 partes iguales.

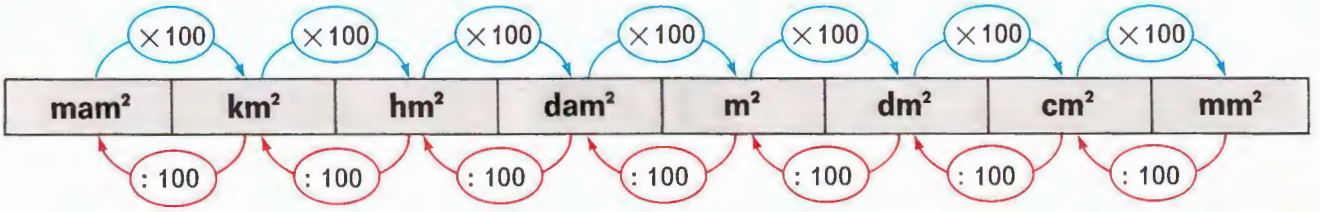
  Cada una de estas partes es 1 **milímetro cuadrado.**

En la figura se observa que 1 dm^2 tiene 10 filas y que en cada fila hay 10 cm^2: **1 dm^2 = 100 cm^2.**

Del mismo modo, **1 cm^2 = 100 mm^2.**

Observa que cada unidad es 100 veces mayor que la siguiente y 100 veces menor que la anterior.

Esta misma regla vale para las demás unidades.



Cada unidad de superficie es 100 veces mayor que la inmediata inferior y 100 veces menor que la inmediata superior.

1. Completa:

1 m^2 es 100 veces mayor que 1 ... → 1 m^2 = 100 ...

1 dm^2 es 100 veces mayor que 1 ... → 1 dm^2 = 100 ...

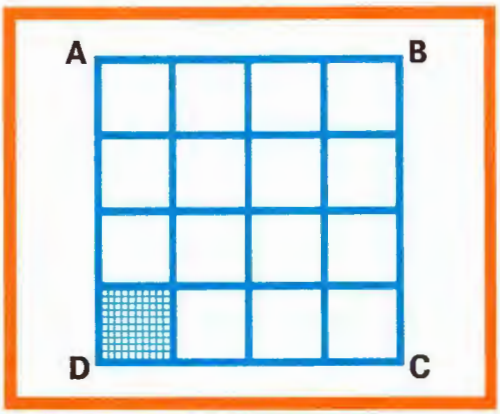
1 cm^2 es 100 veces mayor que 1 ... → 1 cm^2 = 100 ...

1 km^2 es 100 veces mayor que 1 ... → 1 km^2 = 100 ...

1 hm^2 es 100 veces mayor que 1 ... → 1 hm^2 = 100 ...

1 dam^2 es 100 veces mayor que 1 ... → 1 dam^2 = 100 ...

3. Cambio de unidad de superficie.



Este cuadrado **ABCD** tiene una superficie de 16 cm^2; su área en centímetros cuadrados es 16.

Si tomamos como unidad el milímetro cuadrado, el área del cuadrado es 1.600.

Observa que **16 cm^2 → 16 × 100 → 1.600 mm^2**

Por otra parte, si queremos expresar en centímetros cuadrados el área del cuadrado, que es 1.600 mm^2, tenemos que dividir por 100.

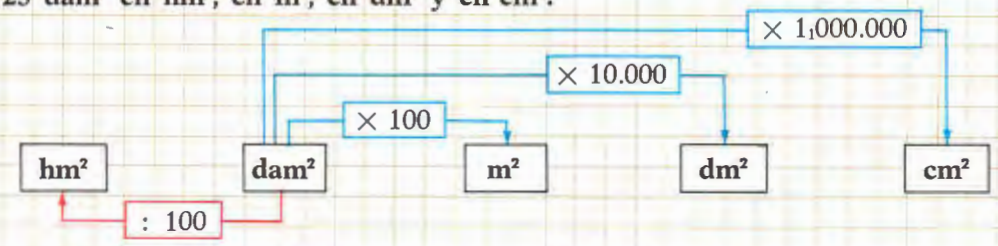
Obtenemos: **1.600 mm^2 : 100 → 16 cm^2**

Para pasar de una unidad de superficie a la unidad inmediata inferior se multiplica por 100.
Para pasar de una unidad de superficie a la unidad inmediata superior se divide por 100.

Observa cómo se expresan 16 cm^2 en otras medidas utilizando el cuadro de unidades, en el que se tiene en cuenta que la unidad de superficie de cada orden ocupa dos lugares. Con este cuadro se puede pasar fácilmente de unas unidades a otras. El trazo azul indica la unidad elegida.

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2	
					16	00	1.600 mm^2
					16		16 cm^2
				0	16		0,16 dm^2
			0	00	16		0,0016 m^2
		0	00	00	16		0,000016 dam^2
	0	00	00	00	16		0,00000016 hm^2
0	00	00	00	00	16		0,0000000016 km^2

1. Expresa 25 dam^2 en hm^2, en m^2, en dm^2 y en cm^2:



25 dam^2 : 100 → ... hm^2

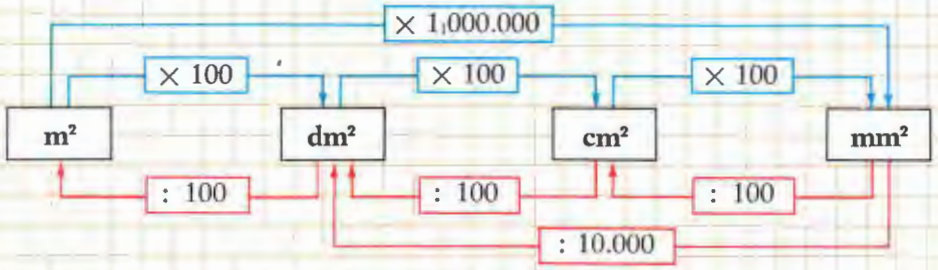
25 dam^2 × 100 → ...

25 dam^2 × 10.000 → ...

25 dam^2 × 1.000.000 → ...

Actividades

1. Observa el esquema y completa:



Para pasar de m^2 a dm^2 se multiplica por ...
Para pasar de m^2 a cm^2 se multiplica por ...
Para pasar de m^2 a mm^2 se multiplica por ...
Para pasar de mm^2 a cm^2 se divide por ...
Para pasar de mm^2 a dm^2 se divide por ...
Para pasar de mm^2 a m^2 se divide por ...

2. Completa:

36 cm^2 = ... mm^2 → 36 × 100 = ...
36 cm^2 = ... dm^2 → 36 : ... = ...
36 cm^2 = ... m^2 → 36 : ... = ...

12 dm^2 = ... m^2 → 12 : ... = ...
12 dm^2 = ... cm^2 → 12 × ... = ...
12 dm^2 = ... mm^2 → 12 × ... = ...

25 m^2 = ... dm^2 → 25 × 100 = ...
25 m^2 = ... cm^2 → 25 × 10.000 = ...
25 m^2 = ... mm^2 → 25 × 1.000.000 = ...

32 mm^2 = ... cm^2 → 32 : 100 = ...
32 mm^2 = ... dm^2 → 32 : 10.000 = ...
32 mm^2 = ... m^2 → 32 : 1.000.000 = ...

3. Completa:

4. Completa:

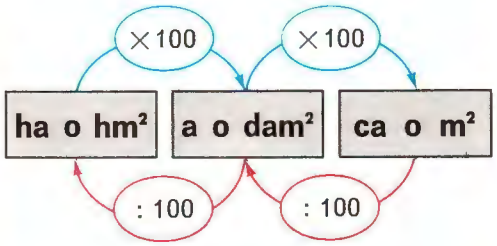
5 dam^2 = ... m^2 → 5 × 100 = ...
5 dam^2 = ... dm^2 → 5 × 10.000 = ...
5 dam^2 = ... cm^2 → 5 × 1.000.000 = ...

0,26 hm^2 = ... dam^2 → 0,26 × 100 = ...
0,26 hm^2 = ... m^2 → 0,26 × 10.000 = ...
0,26 hm^2 = ... dm^2 → 0,26 × 1.000.000 = ...

5. Completa la tabla. Expresa 46 dam^2 en otras unidades:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2	
		46					... dam^2
	0	46					... hm^2
0	00	46					... km^2
		46	00				... m^2
		46	00	00			... dm^2
		46	00	00	00		... cm^2
		46	00	00	00	00	... mm^2

4. Unidades agrarias. Complejos e incomplejos de superficie.



1 ha = 1 hm² = 10.000 m²

1 a = 1 dam² = 100 m²

1 ca = 1 m²

Unidades agrarias

Algunas de las unidades de superficie ya estudiadas se utilizan con frecuencia para medir la superficie de los campos, prados, huertos, etc.

Estas unidades se llaman **unidades agrarias** y son las siguientes:

- El **área (a)**, que equivale al dam²:
  1 a = 1 dam²
- La **hectárea (ha)**, que equivale al hm²:
  1 ha = 1 hm²
- La **centiárea (ca)**, que equivale a 1 m²:
  1 ca = 1 m²

Observa que las unidades agrarias son el hm², el dam² y el m² con otros nombres.

Forma incompleja | Forma compleja

10.560 m² = 1 hm² 5 dam² 60 m²

Complejos e incomplejos de superficie

La medida de este campo de deportes se puede expresar de dos formas:

a) **De forma incompleja,** utilizando una sola unidad:

10.560 m²

b) **De forma compleja,** utilizando varias unidades:

1 hm² 5 dam² 60 m²

1. Completa:

5 ha = … hm²	6 dam² = … a	25 dam² = … ca
2 ca = … m²	8 hm² = … ha	25 dam² = … m²
4 a = … dam²	9 m² = … ca	25 dam² = … a
3 ha = … a	6 a = … m²	3 ha = … m²
4 ha = … a	8 a = … ca	4 ha = … m²

2. Rodea los incomplejos de superficie:

3.248 m²	4 ha 6 a 5 m²	325 ha	46 a
3 a 6 m²	5 m² 6 dm² 8 cm²	2.346 cm²	75 mm²

3. Escribe tres complejos y cuatro incomplejos de superficie.

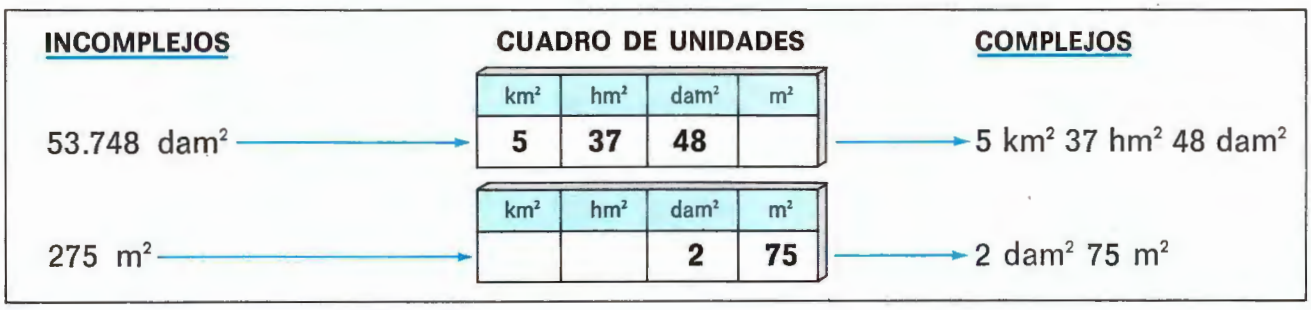
5. Paso de incomplejo a complejo.

CASO A

Cuando el incomplejo no tiene decimales

Para descomponer un incomplejo de superficie en sus diversas unidades se coloca el incomplejo en el cuadro de unidades. Recuerda que en las medidas de superficie cada orden de unidades ocupa dos lugares.

Observa los siguientes ejemplos:



53.748 dam² = 5 km² 37 hm² 48 dam²

- 48 dam²
- 37 hm²
- 5 km²

En la práctica se agrupan las cifras en grupos de dos empezando por la derecha.

346,25 m² = 3 dam² 46 m² 25 dm²

- 25 dm²
- 46 m²
- 3 dam²

5.724,3260 m²

- 60 cm²
- 32 dm²
- 24 m²
- 57 dam²

CASO B

Cuando el incomplejo tiene decimales

- Si el número de cifras decimales es par se parte de la coma para hacer grupos de dos cifras a la izquierda y a la derecha de ella.

  Por ejemplo, el incomplejo 346,25 m² se reduce a complejo así:

  346,25 m² = 3 dam² 46 m² 25 dm²

- Si el número de cifras decimales del número incomplejo es impar se le agrega un cero a la derecha y se procede como en el caso anterior.

  Ejemplo: 5.724,326 m² = 5.724,3260 m².

  5.724,3260 m² = 57 dam² 24 m² 32 dm² 60 cm²

6. Paso de complejo a incomplejo.

CASO A

Cuando no faltan unidades intermedias

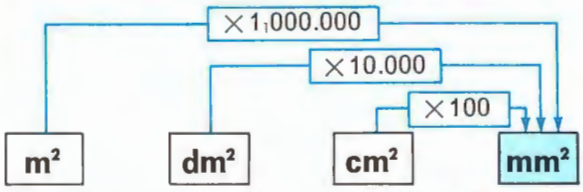
¿Cuántos milímetros cuadrados son 26 m^2, 2 dm^2, 34 cm^2 y 8 mm^2?

Observa dos formas de hacer esta reducción.

PRIMERA FORMA

Reduciendo a milímetros cuadrados

- Se reducen las cantidades a milímetros cuadrados y después se suman:



26 m^2 × 1,000.000 → 26,000.000 mm^2
2 dm^2 × 10.000 → 20.000 mm^2
34 cm^2 × 100 → 3.400 mm^2
8 mm^2 → 8 mm^2
26,023.408 mm^2

SEGUNDA FORMA

Con el cuadro de unidades

1.° Se escriben las unidades en el cuadro:

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
26	2	34	8

2.° Como cada orden de unidades de superficie ocupa dos lugares, se completan con ceros los lugares que faltan.

m^2	dm^2	cm^2	mm^2	
26	02	34	08	→ 26,023.408 mm^2

26 m^2 2 dm^2 34 cm^2 8 mm^2 = 26,023.408 mm^2

CASO B

Cuando faltan unidades intermedias

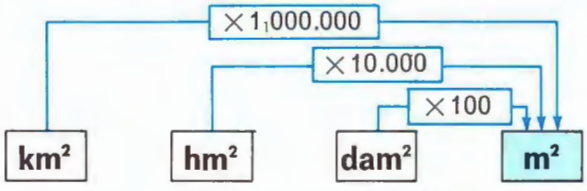
¿Cuántos metros cuadrados son 5 km^2, 26 hm^2 y 4 m^2?

Observa dos formas de hacer esta reducción.

PRIMERA FORMA

Reduciendo a metros cuadrados

- Se reducen las cantidades a metros cuadrados y después se suman:



5 km^2 × 1,000.000 → 5,000.000 m^2
26 hm^2 × 10.000 → 260.000 m^2
4 m^2 → 4 m^2
5,260.004 m^2

SEGUNDA FORMA

Con el cuadro de unidades

1.° Se escriben las unidades en el cuadro:

km^2	hm^2	dam^2	m^2
5	26		4

2.° Se completan con ceros los lugares que faltan y las unidades intermedias que faltan (en este caso los dam^2):

km^2	hm^2	dam^2	m^2	
5	26	00	04	→ 5,260.004 m^2

5 km^2 26 hm^2 4 m^2 = 5,260.004 m^2

Ejercicios y problemas

1. Reduce en tu cuaderno:

6 dm^2 = ... mm^2 0,8 dam^2 = ... m^2 0,35 m^2 = ... dm^2

2. Expresa en centímetros cuadrados y después en metros cuadrados:

4,8 m^2 2,25 dam^2 1.800 mm^2 0,06 hm^2 426 dm^2

0,04 hm^2 50.000 cm^2 36 dam^2 8.000 mm^2 3,6 dam^2

4. Expresa en centiáreas:

8 ha 60 a 786 m^2 3,28 dam^2 0,26 ha

5. Cambia de unidad de modo que las medidas se expresen con números naturales:

0,084 dam^2 = 840 ... 0,025 a = 250 ...

64,25 m^2 = 6.425 ... 0,02 cm^2 = 2 ...

6. Expresa las siguientes unidades en decámetros cuadrados y después ordénalos de mayor a menor:

734 m^2 0,76 hm^2 6.800 dm^2 0,08 km^2 40.000 a

7. Un propietario quiere vender una finca de 5,28 ha. Ha recibido tres ofertas:

Primera oferta: 26.000.000 de pesetas por toda la finca.

Segunda oferta: 500 pesetas por metro cuadrado.

Tercera oferta: 5.200.000 pesetas la hectárea.

¿Cuál es la oferta mejor para el vendedor?

8. Expresa en forma de complejo:

346 dm^2 1.975 cm^2 804.026 m^2 748.262 mm^2

9. Observa cómo se restan dos medidas de superficie:

6 km^2 − (2 km^2 70 hm^2 50 dam^2)

1.º En forma incompleja:

6 km^2 = 60.000 dam^2

2 km^2 70 hm^2 50 dam^2 = 27.050 dam^2

$$\begin{array}{r} 60.000 \\ -\ 27.050 \\ \hline 32.950\ dam^2 \end{array}$$

2.º En forma compleja:

6 km^2 = 5 km^2 100 hm^2 = 5 km^2 99 hm^2 100 dam^2

$$\begin{array}{r} 5\ km^2\ 99\ hm^2\ 100\ dam^2 \\ -\ 2\ km^2\ 70\ hm^2\ 50\ dam^2 \\ \hline 3\ km^2\ 29\ hm^2\ 50\ dam^2 \end{array}$$

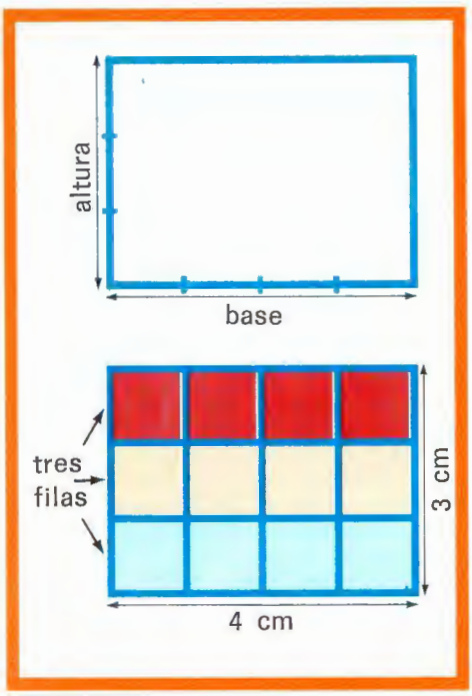
10. Expresa en forma de incomplejo de centímetros cuadrados:

a) 6 hm^2 8 dam^2 6 dm^2 c) 8 hm^2 4 cm^2

b) 5 dam^2 4 m^2 6 dam^2 d) 3 m^2 6 dm^2 84 cm^2

Suma los complejos a) + b) y resta los complejos c) − d).

1. Área del rectángulo.



Este rectángulo tiene 4 cm de largo y 3 cm de ancho; es decir, las dimensiones del rectángulo son la **base = 4 cm** y la **altura = 3 cm.**

¿Cuál es el área de este rectángulo?

Si se divide el rectángulo en cuadrados de 1 cm^2, resultan 3 filas de 4 cm^2 cada una.

Observa que:

centímetros cuadrados pintados de rojo		centímetros cuadrados pintados de amarillo		centímetros cuadrados pintados de azul	
4	+	4	+	4	= 12 cm^2

El área del rectángulo en centímetros cuadrados es $4 \times 3 = 12$.

El área del rectángulo es 12 cm^2.

Área del rectángulo = base × altura

Si la base y la altura vienen expresadas en unidades diferentes hay que reducirlas a una misma unidad.

Si se designan **A** → área; **b** → base; **a** → altura, resultan estas tres fórmulas equivalentes:

$A = b \times a$ ⟷ **$a = A : b$** ⟷ **$b = A : a$**

El área de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura.
La altura del rectángulo es igual al área dividida por la base.
La base del rectángulo es igual al área dividida por la altura.

1. Calcula el área de los siguientes rectángulos:

a) base = 4 cm, altura = 3 cm

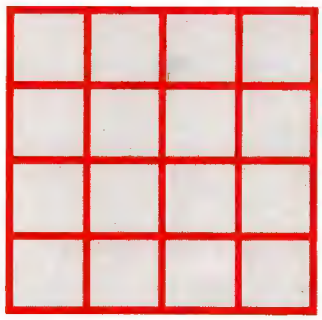
b) base = 8 dam, altura = 9 m

c) base = 6 m, altura = 8 dm

2. Lee y resuelve:

- El lado mayor de un rectángulo (base) mide 6,5 m y la altura 34 dm. Halla el área expresada en decímetros cuadrados.
- El área de un rectángulo es **A** = 408 m^2, y la base mide **b** = 34 m. Halla la altura.
  Aplica la fórmula **a = A : b.**

2. Área de los paralelogramos.



Un lado = 4 cm

Área = 16 cm

Área del cuadrado

Este cuadrado tiene 4 cm de lado.

En un cuadrado **lado = base = altura.**

¿Cuál es el área de este cuadrado?

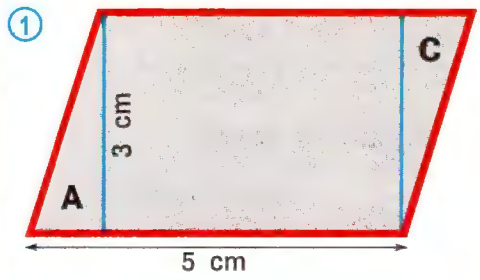
Se observa que el cuadrado tiene 4 filas de 4 cm² cada una.

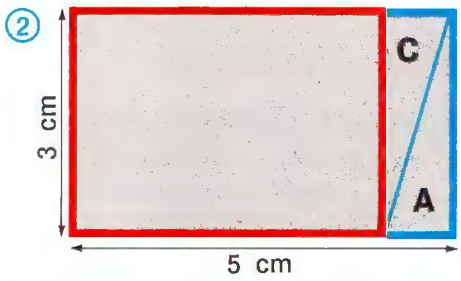
El área del cuadrado en centímetros cuadrados es: **4+4+4+4 = 16 cm².**

O también: **4 cm × 4 cm = 16 cm².**

El área del cuadrado es 16 cm².

Área de un cuadrado = lado × lado





Área del romboide

Este romboide tiene una base de 5 cm y una altura de 3 cm.

¿Cuál es el área de este romboide?

① Calca esta figura y recorta el triángulo **A.**

② Pégalo junto al triángulo **C** de tal manera que se forme un rectángulo como el de la figura siguiente.

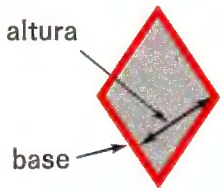
Se observa que este rectángulo tiene la misma área que el romboide anterior y que tiene la misma base y la misma altura.

base = 5 cm **altura = 3 cm**

Por eso, área del romboide = 5 × 3 = 15 cm².

El área de este romboide es 15 cm².

Área de un romboide = base × altura



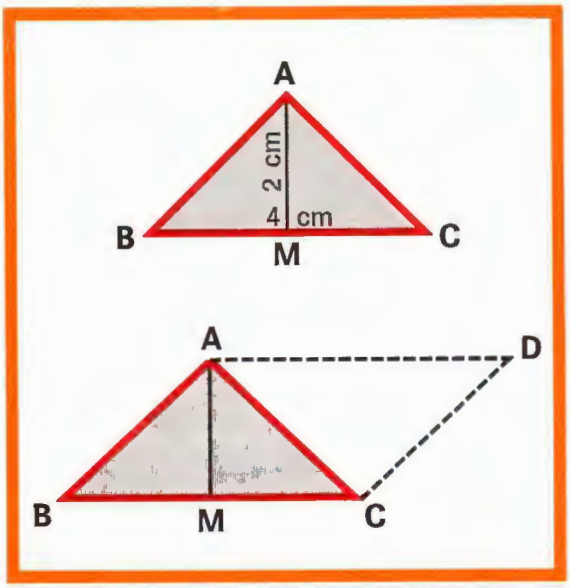
Área del rombo

Procediendo como en el caso del romboide, se puede comprobar que:

Área de un rombo = base × altura

El área de un paralelogramo es igual al producto de la base por la altura.

3. Área del triángulo.



Área de un triángulo cualquiera

Observa el triángulo **ABC.**

Se puede tomar como base uno cualquiera de los lados.

Si se toma como base el lado **BC,** la altura es **AM.**

Observa que la base **BC** = 4 cm y la altura **AM** = 2 cm.

¿Cuál es el área de este triángulo?

Si por el punto **A** se traza una paralela al lado **BC** y por el punto **C** se traza una paralela al lado **AB,** resulta el paralelogramo **ABCD.**

Como el triángulo **ABC** es la mitad del paralelogramo, su área también será la mitad.

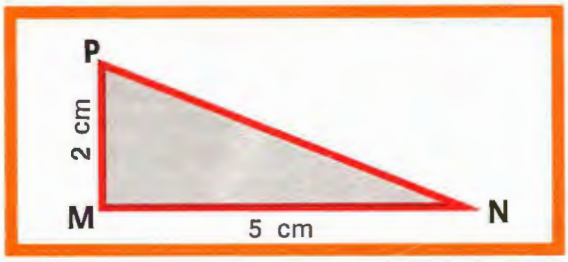
Área del triángulo =

$$= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4 \text{ cm}^2$$

El área del triángulo es 4 cm².

$$\textbf{Área del triángulo} = \frac{\textbf{base} \times \textbf{altura}}{\textbf{2}} = \frac{\textbf{b} \times \textbf{a}}{\textbf{2}}$$

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base por la altura.



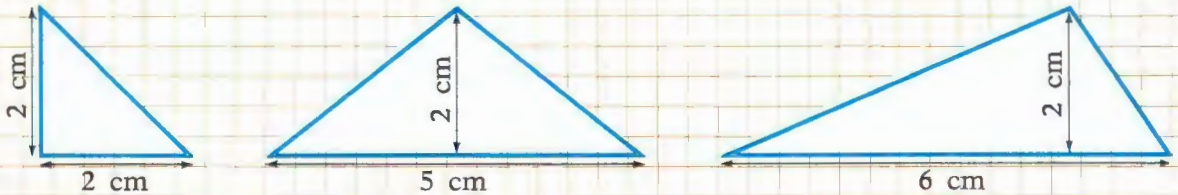
Área del triángulo rectángulo

En el triángulo rectángulo **MNP,** si se toma como base el cateto **MN** = 5 cm, la altura será el otro cateto **PM** = 2 cm.

El área del triángulo **MNP** $= \frac{5 \times 2}{2} = 5 \text{ cm}^2$

El área de un triángulo rectángulo es igual a la mitad del producto de sus catetos.

1. Halla el área de los siguientes triángulos:



Cálculo mental, cálculo rápido

1. ¿Cuántos metros cuadrados mide el área de un rectángulo cuyas dimensiones son 6 m y 4 m?

2. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuyas dimensiones son 8 cm y 7 cm?

3. ¿Cuál es el área de un cuadrado de 8 m de lado?

4. ¿Cuál es el área de un cuadrado de 10 metros de lado?

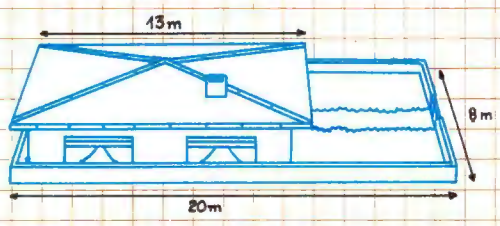
Ejercicios y problemas

1. ¿Cuántas baldosas cuadradas de 10 cm de lado se necesitan para enlosar una superficie rectangular de 4 m de base y 3 m de altura?

2. ¿Cuántas hectáreas tiene un campo rectangular de 170 m de base y 28 m de altura?

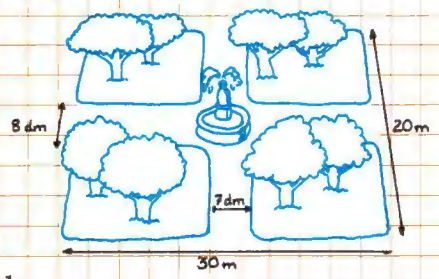
¿Cuál es el valor de este campo a 150 ptas. el metro cuadrado?

3. Una parcela tiene un jardín y una casa. La casa es un rectángulo de 13 m de largo y 8 m de ancho y el jardín es un rectángulo.



Calcula los metros cuadrados que tiene el jardín.

4. Un jardín rectangular tiene por dimensiones 30 m y 20 m. El jardín está atravesado por dos caminos perpendiculares que forman una cruz. Uno tiene un ancho de 8 dm y el otro de 7 dm.



Calcula:

a) El área del camino.

b) El área del jardín (sin contar el camino).

5. En el centro de un jardín cuadrado de 150 m de lado hay una piscina, también cuadrada, de 25 m de lado.

¿Qué superficie tiene el jardín?

¿Qué superficie del jardín ocupa la piscina?

6. Halla en centímetros cuadrados el área de los cuadrados cuyos lados miden:

a) 6 cm b) 3 dam c) 20 m d) 5 dm

7. Halla el área de los paralelogramos cuyas bases y alturas se indican.

a) base = 6 m, altura = 3 m

b) base = 6 hm, altura = 4 dam

8. Halla el área de un triángulo que tiene 2,4 dam de base y 13 m de altura.

9. Halla el área de un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales miden 4 cm cada uno.

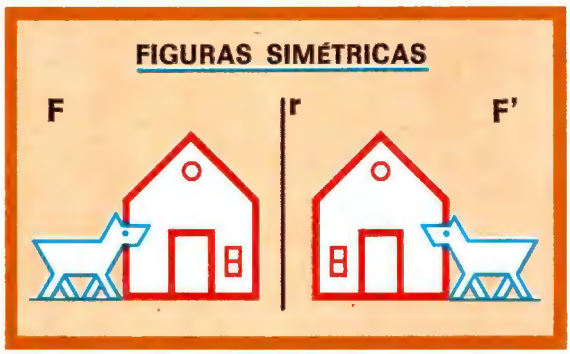
10. ¿Qué superficie tiene un campo rectangular que tiene 2 h 7 dam 5 m de largo y 9 dam 6 m de ancho?

11. ¿Cuántos árboles se pueden plantar en un terreno rectangular de 32 m de largo y 30 m de ancho si cada planta necesita para desarrollarse 4 m^2?

12. Un terreno en forma triangular tiene 6 dam de base y 25 m de altura.

Halla la superficie del terreno en metros cuadrados.

1. Simetría respecto de un eje.



Eje de simetría

Observa la figura **F** de la izquierda.

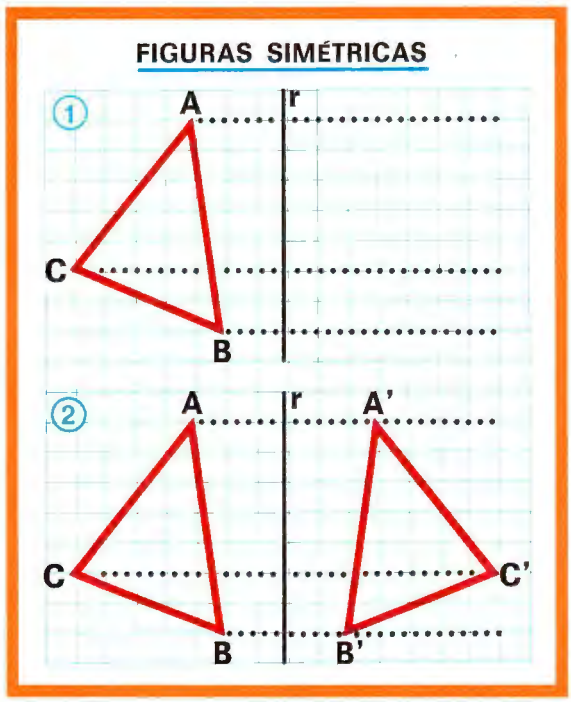
Si se dobla el papel por la recta **r** y se calcan la casita y el perro se obtiene la figura **F'**.

La figura **F'** se dice que es simétrica de la **F**, y la recta **r** se llama **eje de simetría.**

Como las dos figuras **F** y **F'** coinciden al doblar por el eje, estas figuras son iguales, pero tienen distinta orientación.

En la figura **F** el perro está a la izquierda; en cambio, en la figura **F'** el perro está a la derecha.

Se puede comprobar que las figuras simétricas se encuentran a igual distancia del eje.



Simetría sobre la cuadrícula

Utilizando la cuadrícula puedes hallar la figura simétrica de otra respecto de un eje sin necesidad de doblar el papel.

Observa cómo se halla el triángulo simétrico del triángulo **ABC** respecto del eje **r.**

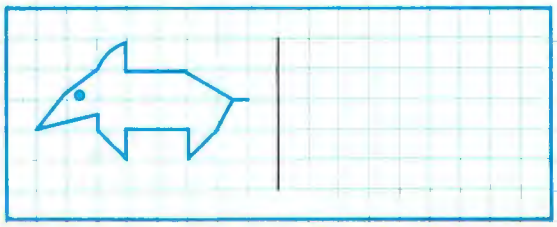
① Se cuentan los cuadrados que hay desde cada punto al eje:

De **A** al eje hay 3 cuadrados.
De **B** al eje hay 2 cuadrados.
De **C** al eje hay 7 cuadrados.

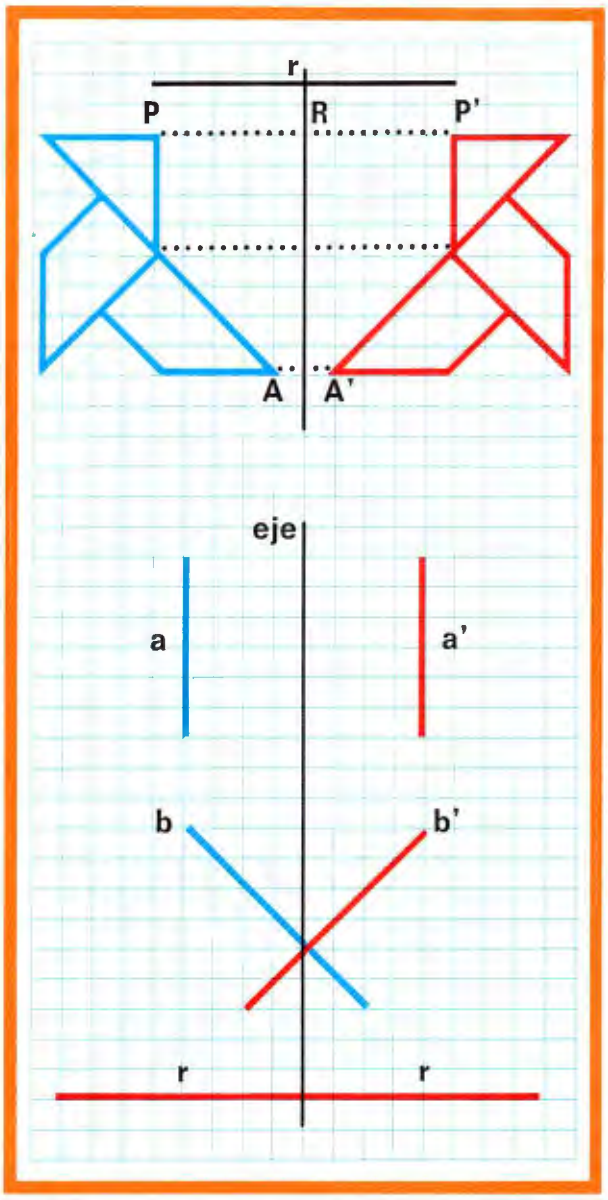
② Se toman al otro lado del eje, siguiendo las rectas de puntos, las mismas distancias:

De **A'** al eje hay 3 cuadrados.
De **B'** al eje hay 2 cuadrados.
De **C'** al eje hay 7 cuadrados.

1. Dibuja la figura simétrica en cada caso:



2. Propiedades de la simetría respecto de un eje.



Observa la pajarita azul y su simétrica, la pajarita roja.

Se observa que cada punto de la figura de la izquierda tiene su punto simétrico en la figura de la derecha.

Es fácil comprobar las siguientes propiedades:

1.ª El segmento formado por cada punto y su simétrico es perpendicular al eje de simetría:

PP' perpendicular a **r**

2.ª Los puntos simétricos están a igual distancia del eje de simetría:

PR = RP'

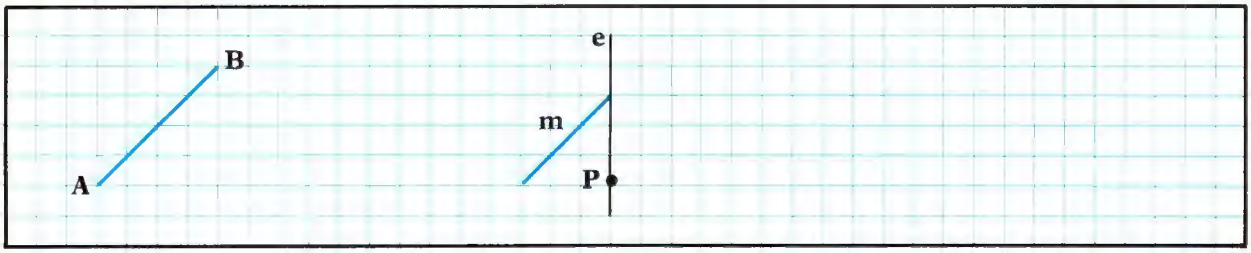
3.ª Las figuras simétricas son iguales, pero tienen distinta orientación. (Observa que una pajarita mira hacia la izquierda y su simétrica mira hacia la derecha.)

4.ª Si una recta **a** es paralela al eje de simetría, su simétrica **a'** también es paralela a dicho eje.

5.ª Si una recta **b** corta el eje de simetría, su simétrica **b'** también lo corta en el mismo punto.

6.ª Si una recta **r** es perpendicular al eje, su simétrica es la misma recta **r.**

1. Observa las figuras:



Dibuja los simétricos respecto del eje **e**:

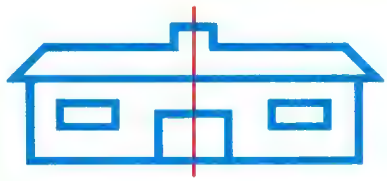
a) Del segmento **AB.**

b) De la recta **m.**

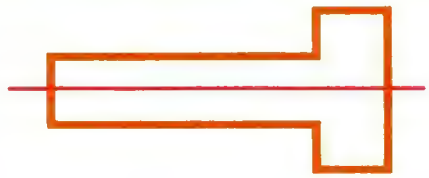
c) Del punto **P.**

3. Figuras con ejes de simetría.

• Observa las siguientes figuras.



Un eje de simetría.



Un eje de simetría.

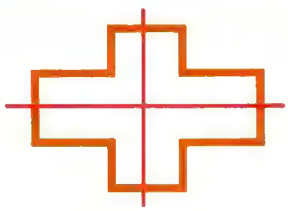
Un eje de simetría.

Al doblar por la recta coloreada de rojo coinciden las dos partes en que queda dividida cada figura.

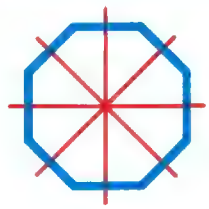
La recta coloreada de rojo se llama **eje de simetría** de estas figuras. Cada una de estas figuras tiene un solo eje de simetría.

Pero hay figuras que tienen más de un eje de simetría.

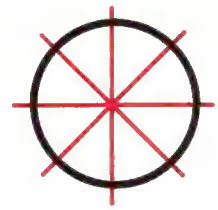
• Observa en las siguientes figuras algunos ejes de simetría.



Dos ejes de simetría.



Ocho ejes de simetría.

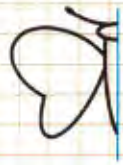


Infinitos ejes de simetría. Cada diámetro es un eje de simetría.

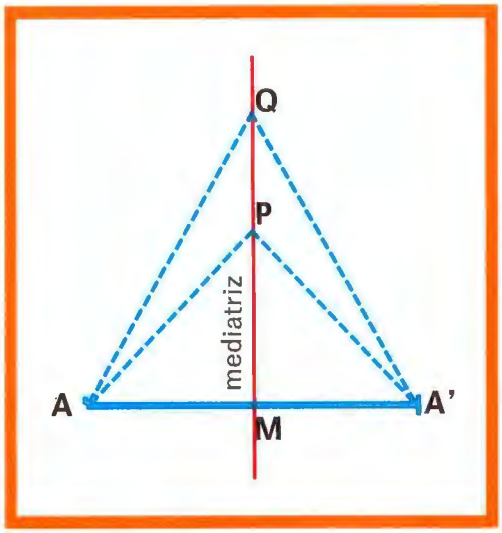
Una recta es eje de simetría de una figura si al doblar la figura por la recta coinciden las dos partes en que queda dividida la figura.

1. Traza el eje de simetría de las siguientes figuras:

2. Completa las figuras sabiendo que las rectas azules son ejes de simetría.



4. Mediatriz de un segmento. Trazado.



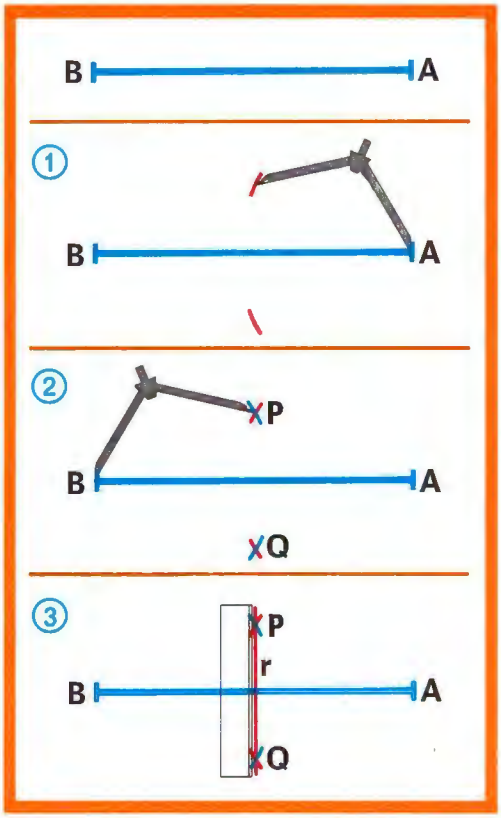
La mediatriz de un segmento como su eje de simetría

Ya sabes que la mediatriz de un segmento es la perpendicular al segmento en su punto medio.

- Si se dobla la hoja por la mediatriz del segmento **AA'** se comprueba que los segmentos **MA** y **MA'** coinciden. Esto indica que la mediatriz es el eje de simetría del segmento **AA'**.
- Al doblar la hoja también se comprueba que los segmentos **PA** y **PA'** coinciden: **PA = PA'**.

  También coinciden los segmentos **QA** y **QA'**.

La mediatriz de un segmento es el eje de simetría de dicho segmento.
Los puntos de la mediatriz de un segmento están a igual distancia de los extremos del segmento.



Trazado de la mediatriz de un segmento

La propiedad de que los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento permite trazar la mediatriz del segmento **AB**, del modo siguiente:

① Se abre el compás de modo que su abertura sea mayor que la mitad del segmento **AB**.

Después se hace centro en el extremo **A** y se traza un arco (arco rojo).

② Manteniendo el compás con la misma abertura se hace centro en el punto **B** y se traza otro arco (arco azul).

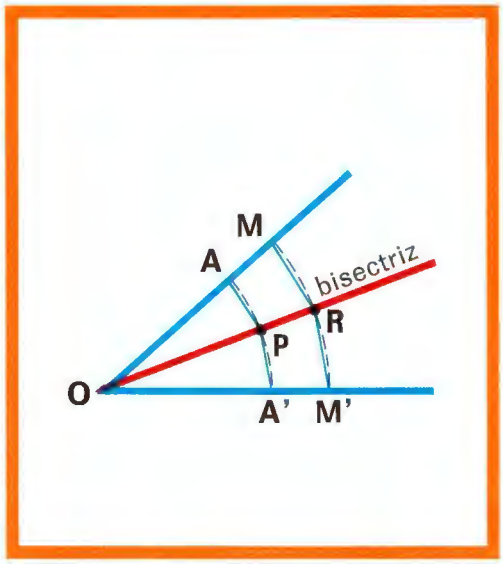
③ Se traza con la regla una recta que pase por los puntos de intersección **P** y **Q** de los arcos trazados.

La recta **r** es la mediatriz del segmento **AB**.

1. **Dibuja en tu cuaderno un segmento y traza su mediatriz.**

2. **Dibuja una recta con una regla.**
   Traza, con ayuda del compás, una perpendicular a ella.

5. Bisectriz de un ángulo. Trazado.



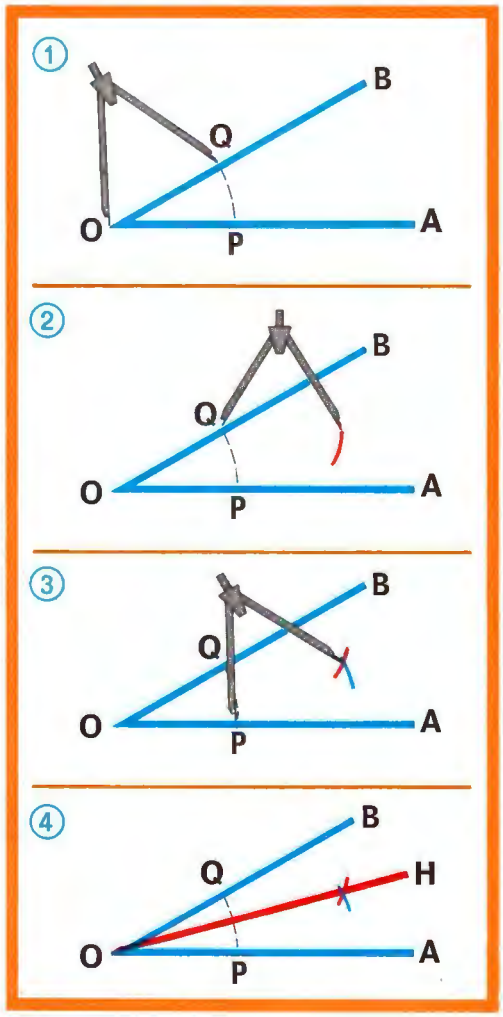
La bisectriz de un ángulo como el eje de simetría del mismo ángulo

Ya sabes que la bisectriz de un ángulo es la semirrecta que pasa por el vértice y divide el ángulo en dos ángulos iguales.

- Si se dobla la hoja por la bisectriz del ángulo $\widehat{AOA'}$ se comprueba que los lados **OA** y **OA'** coinciden. Esto indica que la bisectriz es el eje de simetría del ángulo $\widehat{AOA'}$.
- Al doblar la hoja también se comprueba que los segmentos **PA** y **PA'** coinciden.

  Igualmente coinciden los segmentos **PA** y **PA'** y **RM** y **RM'**.

La bisectriz de un ángulo es el eje de simetría de dicho ángulo. Los puntos de la bisectriz de un ángulo están a igual distancia de los lados del ángulo.



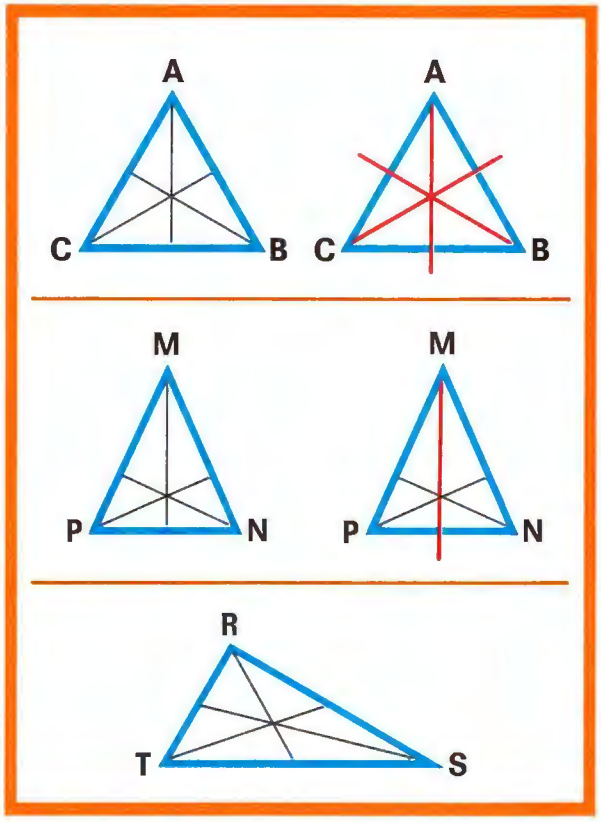
Trazado de la bisectriz de un ángulo

La propiedad de los puntos de la bisectriz de equidistar de los lados del ángulo permite trazar la bisectriz del ángulo $\widehat{AOB}$ del modo siguiente:

1. Con el compás se hace centro en el vértice del ángulo **O** y se traza un arco que cortará a los lados en dos puntos **P** y **Q**.
2. Se hace centro en el punto **Q** y se traza un arco (arco rojo).
3. Manteniendo el compás con la misma abertura que en el segundo paso, se hace centro en el punto **P** y se traza otro arco (arco azul).
4. El punto de intersección de los dos arcos **H** se une con el vértice **O**.

   La semirrecta **OH** es la bisectriz del ángulo $\widehat{AOB}$.

6. Ejes de simetría de algunas figuras planas. I.



Ejes de simetría de los triángulos

En el triángulo equilátero **ABC** se han trazado las tres alturas. Observa que cada una de ellas pasa por el punto medio de un lado. Si se dobla el papel por cualquiera de las alturas, una mitad del triángulo se superpone a la otra mitad.

Esto indica que las alturas son **ejes de simetría** del triángulo equilátero.

En el triángulo isósceles **MNP** se han trazado también las tres alturas. Observa que sólo la altura que parte del vértice **M** pasa por el punto medio del lado desigual.

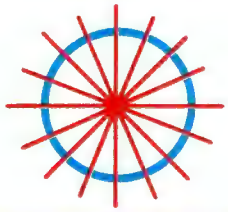
Doblando el papel se puede comprobar que sólo la altura que pasa por el vértice **M** es **eje de simetría** del triángulo.

El triángulo escaleno **RST** no tiene ningún eje de simetría.

Los triángulos equiláteros tienen tres ejes de simetría, que son sus tres alturas.

Los triángulos isósceles tienen un solo eje de simetría, que es la altura trazada sobre el lado desigual.

Los triángulos escalenos no tienen ningún eje de simetría.



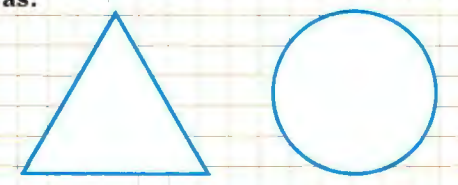
Ejes de simetría del círculo

Cada diámetro de la circunferencia es un eje de simetría de la circunferencia y del círculo. Como hay infinitos diámetros, resulta que el círculo tiene infinitos ejes de simetría.

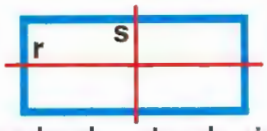
El círculo tiene infinitos ejes de simetría.

1. Traza el eje de simetría en cada figura:

2. Traza tres ejes de simetría en las siguientes figuras:

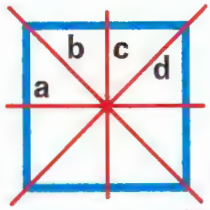


7. Ejes de simetría de algunas figuras planas. II.



Rectángulo: dos ejes de simetría.

Rombo: dos ejes de simetría.



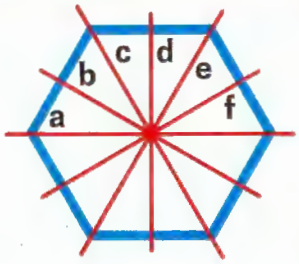
Cuadrado: cuatro ejes de simetría.

Romboide: no tiene ejes de simetría.

Ejes de simetría de los paralelogramos

En estos paralelogramos aparecen dibujados sus ejes de simetría.

- El **rectángulo** tiene **dos** ejes de simetría, que son las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos.
- El **rombo** tiene **dos** ejes de simetría, que son las rectas que determinan sus diagonales.
- El **cuadrado**, por ser rombo y rectángulo a la vez, tiene **cuatro** ejes de simetría, que son las rectas que determinan sus diagonales y las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos.
- El **romboide** no tiene ejes de simetría.



Hexágono: seis ejes de simetría.

Ejes de simetría del hexágono regular

En este hexágono aparecen dibujados sus ejes de simetría.

El hexágono regular tiene **seis ejes** de simetría.

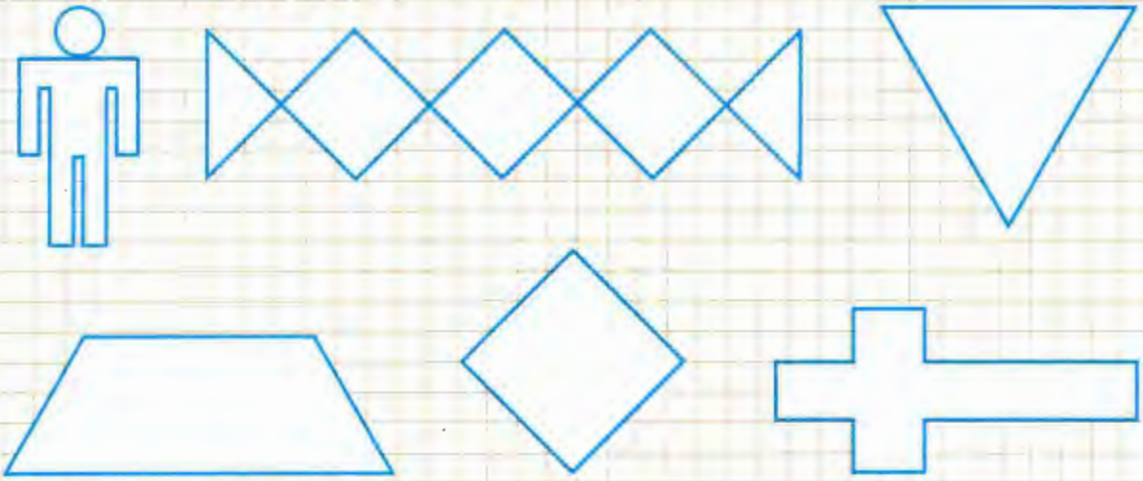
- Tres ejes de simetría son las rectas que unen los puntos medios de lados opuestos.
- Otros tres ejes son las rectas que unen los vértices opuestos.

1. RECORTA Y PLIEGA

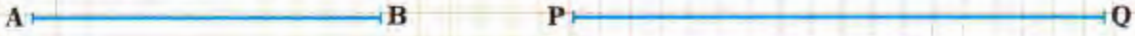
Calca estas figuras y recórtalas. Después dobla por la línea roja y averigua si esta línea es o no eje de simetría de la figura.

Ejercicios y problemas

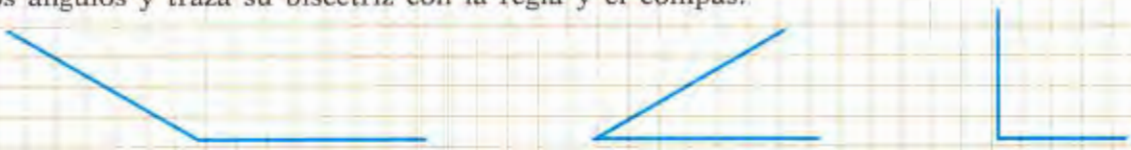
1. Traza los ejes de simetría que puedas en las siguientes figuras:



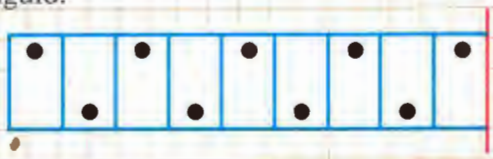
2. Calca los segmentos **AB** y **PQ** y traza su mediatriz utilizando la regla y el compás.



3. Calca estos ángulos y traza su bisectriz con la regla y el compás.



4. Sabiendo que la línea roja es un eje de simetría del rectángulo, completa el dibujo del rectángulo.



5. ¿Tiene la estrella otros ejes de simetría además del que se ve en la figura? Dibújalos.

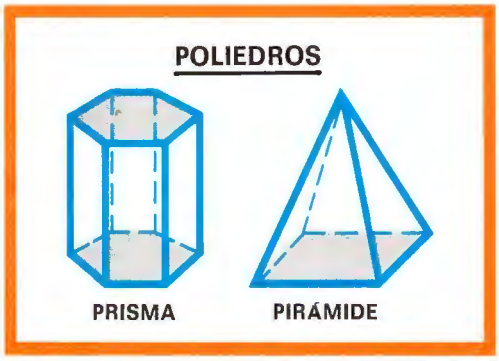
6. Dibuja un triángulo equilátero y traza sus ejes de simetría.

7. Dibuja un triángulo isósceles y traza su eje de simetría.

8. ¿Cuál de los cuatro paralelogramos no tiene ejes de simetría?

9. Dibuja un rectángulo, un rombo y un cuadrado. Traza después sus ejes de simetría.

1. Poliedros. Desarrollo de un poliedro.

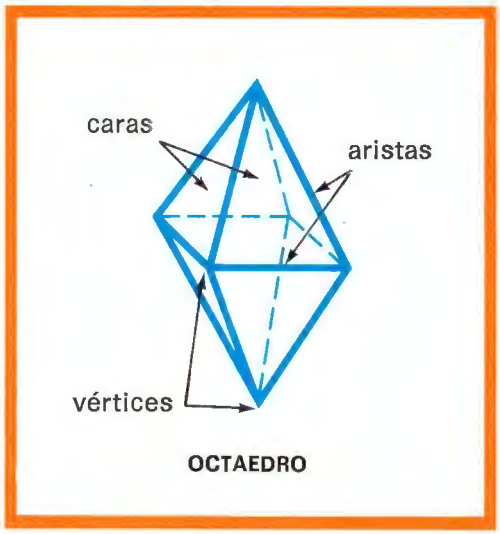


Poliedros

Observa estos cuerpos geométricos. Todos ellos están limitados por polígonos y se llaman **poliedros.**

Los prismas y las pirámides son poliedros, pero hay además otros poliedros.

Poliedro es una porción de espacio limitada por polígonos.



Elementos de un poliedro

Esta figura es un poliedro que está formado por ocho caras que son triángulos equiláteros.

Este poliedro se llama **octaedro.**

En éste y en todos los poliedros puedes observar los siguientes elementos:

- Las **caras de un poliedro,** que son los polígonos que lo limitan.
- Las **aristas de un poliedro,** que son los lados de las caras.
- Los **vértices de un poliedro,** que son los puntos donde se juntan tres o más aristas.

Desarrollo de un poliedro

Si colocamos sobre un plano todas las caras de un poliedro se obtiene una figura plana que se llama **desarrollo** de dicho poliedro.

Observa el desarrollo de un octaedro. Aparecen numeradas las ocho caras del octaedro.

1. Lee y contesta:

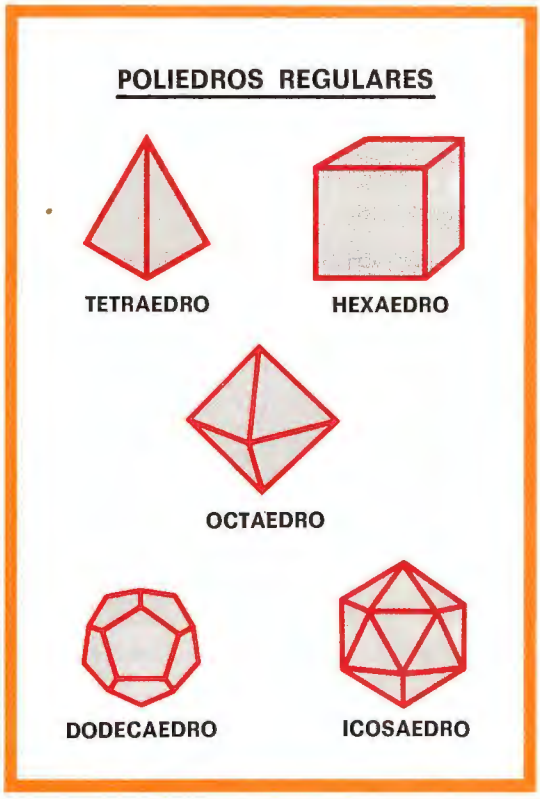
¿Cómo se llaman los polígonos que limitan un poliedro?

¿Cuál es el menor número de aristas que concurren en un vértice de un poliedro?

2. Indica dos objetos que tengan forma de poliedro.

Dibújalos.

2. Poliedros regulares.

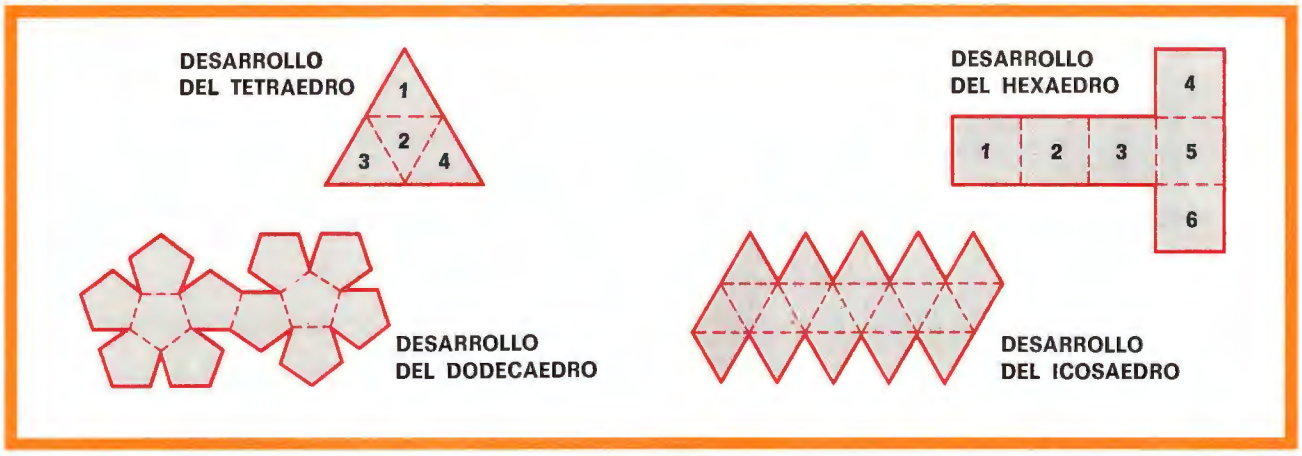


Hay cinco poliedros cuyas caras son polígonos regulares e iguales. Éstos son los **poliedros regulares.**

Los poliedros regulares son el tetraedro, el hexaedro o cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

- El **tetraedro** está formado por 4 caras que son triángulos equiláteros iguales.
- El **hexaedro o cubo** está formado por 6 caras que son cuadrados iguales.
- El **octaedro** está formado por 8 caras que son triángulos equiláteros iguales.
- El **dodecaedro** está formado por 12 caras que son pentágonos regulares iguales.
- El **icosaedro** está formado por 20 caras que son triángulos equiláteros iguales.

Observa el desarrollo de estos poliedros regulares. (El desarrollo del octaedro está en la página anterior.)



1. Escribe el nombre de los cinco poliedros regulares.

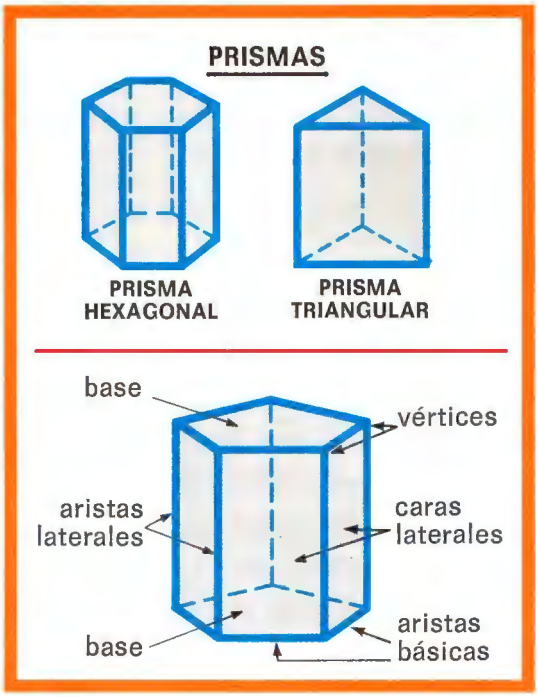
Indica el número de caras que tiene cada uno.

2. Completa la tabla:

Poliedro	Número de caras	Número de aristas	Número de vértices
Tetraedro			
Cubo			
Octaedro			

Comprueba que en los poliedros regulares se cumple: número de caras + número de vértices = número de aristas + 2.

3. Prismas. Elementos. Desarrollo de un prisma.



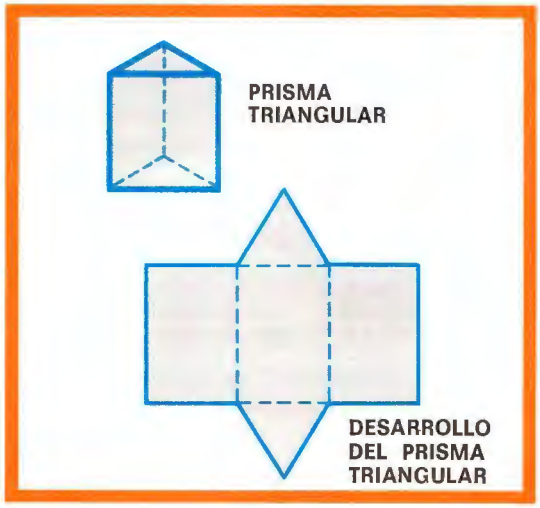
Prismas: Elementos

Estos poliedros son prismas.

Los elementos fundamentales de un prisma son los siguientes: caras, aristas y vértices.

- Las **caras** pueden ser:
  - — **Caras básicas** o **bases** del prisma, que son dos polígonos iguales.
  - — **Caras laterales** del prisma, que son paralelogramos.
- Las **aristas** pueden ser:
  - — **Aristas básicas,** que son los lados de las bases.
  - — **Aristas laterales,** que son los lados de las caras laterales que no son aristas básicas.
- Los **vértices,** que son los puntos donde se unen tres o más aristas.

Prismas son los poliedros que están limitados por dos bases que son polígonos iguales y por caras laterales que son paralelogramos.



Desarrollo de un prisma

Observa este prisma triangular.

Si se extienden sobre un plano todas sus caras resulta su **desarrollo.**

Se observa que este prisma está formado por:

- Tres paralelogramos que son las caras laterales.
- Dos triángulos que son las bases.

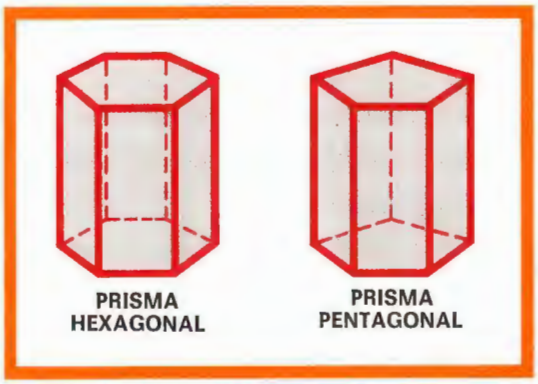
1. Dibuja un prisma triangular.

Dibuja después su desarrollo y colorea en el desarrollo las bases de azul y las caras laterales de rojo.

Contesta:

- ¿Cuántas caras laterales tiene?
- ¿Cuántas caras tiene en total este poliedro?
- ¿Cuántas aristas tiene?
- ¿Cuántos vértices tiene?

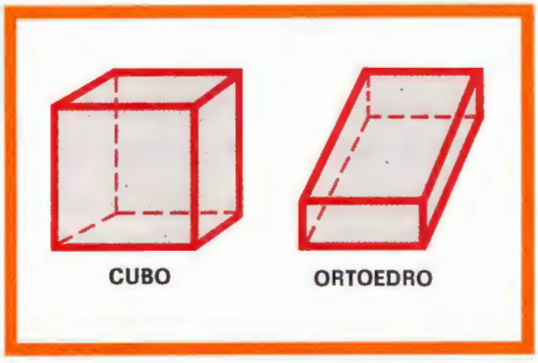
4. Clases de prismas. Prisma regular.



Clases de prismas según el polígono de la base

Según sean los polígonos de las bases, el prisma se llama:

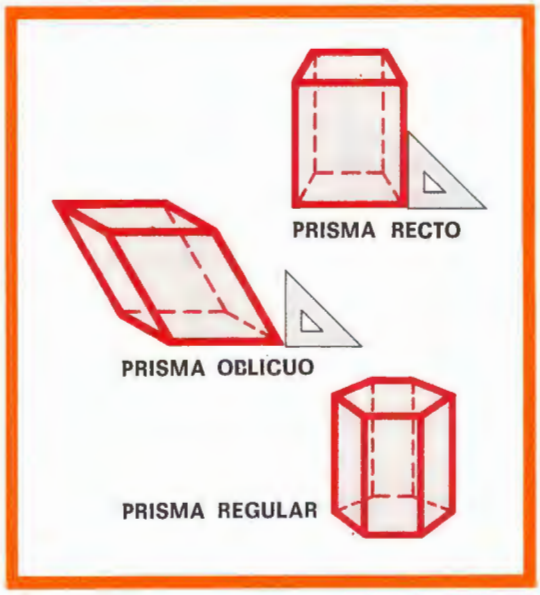
- **Prisma triangular:** las bases son triángulos.
- **Prisma cuadrangular:** las bases son cuadriláteros.
- **Prisma pentagonal:** las bases son pentágonos.
- **Prisma hexagonal:** las bases son hexágonos.



El cubo y el ortoedro

Dos prismas importantes son el cubo y el ortoedro.

- El **cubo** es un prism a que tiene seis caras que son cuadrados iguales. Por eso el cubo es un poliedro regular.
- El **ortoedro** es el prisma que tiene las seis caras rectangulares.



Prismas rectos, oblicuos y regulares

- **Prisma recto.** Es el prisma que tiene las aristas laterales perpendiculares a las bases.
- **Prisma oblicuo.** Es el prisma en el que las aristas laterales no son perpendiculares a las bases.

  Para saber si un prisma es recto u oblicuo se aplica la escuadra como se indica en la figura.
- **Prisma regular**. Es el prisma recto que tiene por base dos polígonos regulares.

Hay un prisma regular, el cubo, que también es un poliedro regular.

Los demás prismas regulares son poliedros irregulares.

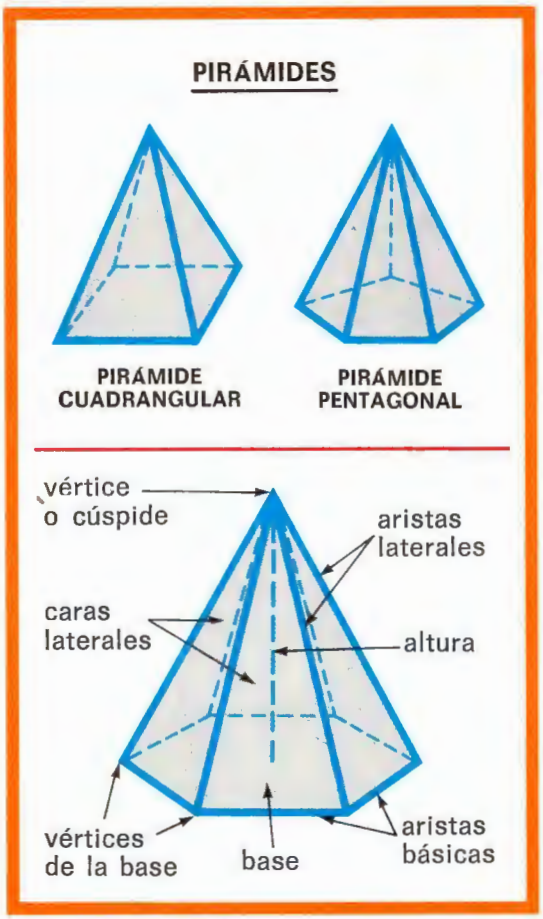
Prisma regular es un prisma recto que tiene por bases dos polígonos regulares.

1. Dibuja el único prisma regular que también es poliedro regular.

2. Contesta:

¿Por qué el prisma hexagonal regular no es un poliedro regular?

5. Pirámides. Elementos. Desarrollo de una pirámide.



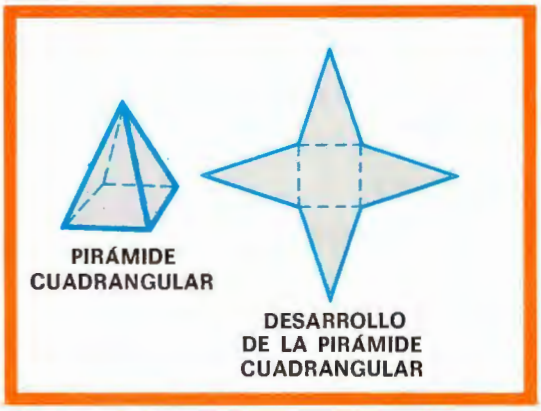
Pirámides: Elementos

Estos poliedros son pirámides.

Los elementos fundamentales de una pirámide son caras, aristas y vértices.

- Las **caras** pueden ser:
  - — **Base** de la pirámide, que es un polígono cualquiera.
  - — **Caras laterales** de la pirámide, que son triángulos.
- Las **aristas** pueden ser:
  - — **Aristas básicas,** que son los lados de la base.
  - — **Aristas laterales,** que son los lados de las caras laterales que no son aristas básicas.
- Los **vértices** pueden ser:
  - — **Vértices de la base,** que son los vértices del polígono de la base.
  - — **Vértice** o **cúspide** de la pirámide, que es el punto en el que se encuentran las aristas laterales.
- La **altura** es la distancia del vértice a la base.

Pirámides son los poliedros que están limitados por una base que es un polígono cualquiera y por caras laterales que son triángulos que concurren en la cúspide.



Desarrollo de una pirámide

Observa la pirámide cuadrangular.

Si se extienden sobre un plano todas sus caras, resulta el desarrollo de esta pirámide.

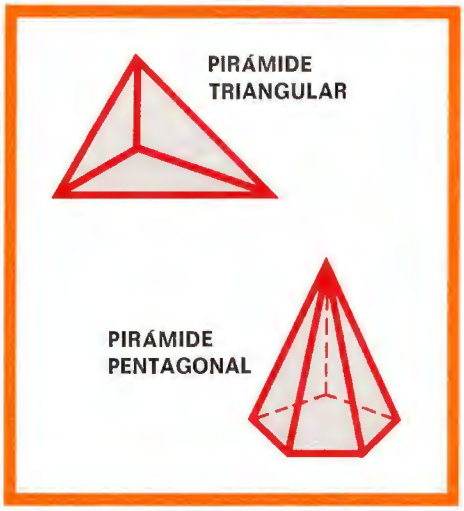
Se observa que está formada por:

- Cuatro triángulos que son las caras laterales.
- Un cuadrilátero que es la base.

1. Contesta:

- ¿Cuántas caras laterales tiene una pirámide cuadrangular? Dibújala.
- ¿Cuántas caras en total tiene este poliedro?
- ¿Cuántas aristas tiene? ¿Cuántos vértices tiene en total?

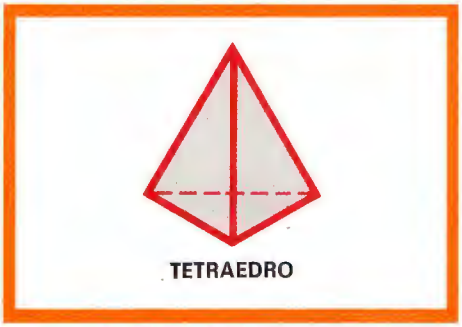
6. Clases de pirámides. Pirámide regular.



Clases de pirámides según el polígono de la base

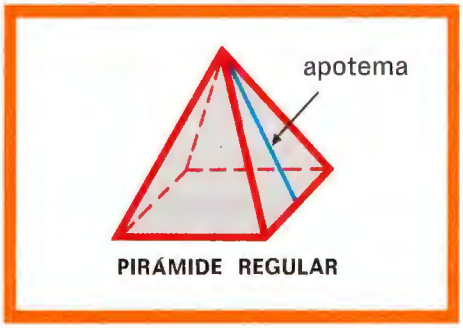
Según sea el polígono de la base, la pirámide se llama:

- **Pirámide triangular:** la base es un triángulo.
- **Pirámide cuadrangular:** la base es un cuadrilátero.
- **Pirámide pentagonal:** la base es un pentágono.
- **Pirámide hexagonal:** la base es un hexágono.
- **Pirámide heptagonal, pirámide octogonal,** etc.



El tetraedro

El tetraedro es una pirámide triangular formada por cuatro caras que son triángulos equiláteros iguales. Como los triángulos equiláteros son polígonos regulares, resulta que el tetraedro es también un **poliedro regular.**



Pirámide regular

Observa esta pirámide cuadrangular.

Tiene por base un polígono regular (un cuadrado) y las caras laterales son triángulos isósceles.

Por eso es una **pirámide regular.**

Se llama **apotema** de una pirámide regular a la altura de una cara lateral.

Pirámide regular es la pirámide que tiene por base un polígono regular y por caras laterales triángulos isósceles.

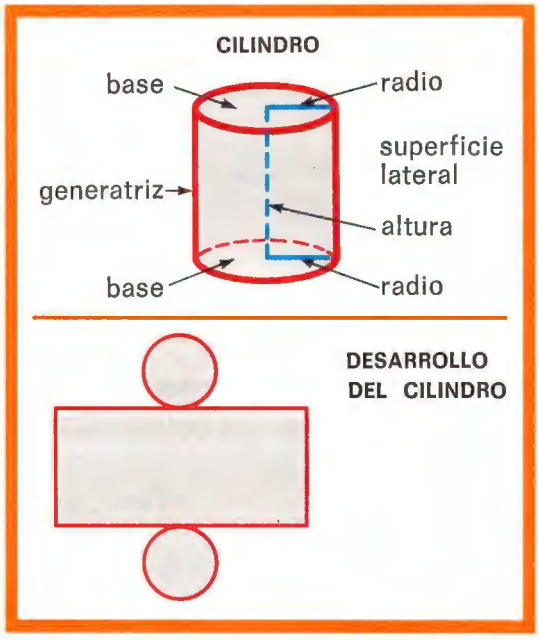
Hay una pirámide regular, el tetraedro, que es también un poliedro regular. Las demás pirámides regulares son poliedros irregulares.

1. Dibuja la única pirámide regular que también es poliedro regular.

2. Contesta:

¿Por qué la pirámide hexagonal regular no es un poliedro regular?

7. Cuerpos redondos.

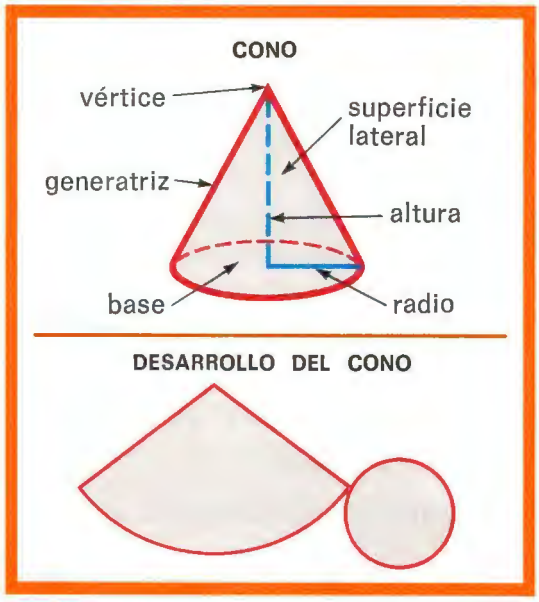


Se llama cuerpos redondos al **cilindro,** al **cono** y a la **esfera.**

El cilindro

Este cuerpo redondo es un **cilindro.** Sus elementos fundamentales son:

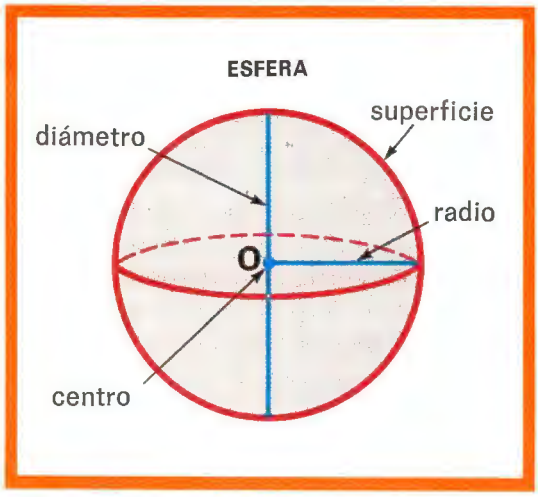
- Las **bases del cilindro,** que son dos círculos iguales y paralelos.
- La **superficie lateral** del cilindro, que es una cara lateral curva.
- La **generatriz** es el segmento azul dibujado en la superficie lateral.
- La **altura** es la distancia entre las bases.
- **Radio** del cilindro es el radio de las bases.



El cono

Este cuerpo redondo es un **cono**. Sus elementos fundamentales son:

- La **base** del cono, que es un círculo.
- La **superficie lateral** del cono, que es una cara lateral curva que, con la base, limita el cono.
- El **vértice,** que es el punto de la superficie lateral opuesto a la base.
- La **generatriz,** que es un segmento cualquiera que une el vértice con la circunferencia de la base.
- La **altura,** que es la distancia del vértice a la base.



La esfera

Este cuerpo redondo es una **esfera.**

La parte exterior de la esfera se llama **superficie** de la esfera.

Todos los puntos de la superficie esférica distan lo mismo del punto **O,** llamado **centro.**

- **Radio** es el segmento que une el centro con un punto cualquiera de la superficie de la esfera.
- La superficie de una esfera no se puede extender sobre un plano. Es una superficie que no tiene desarrollo.

Ejercicios y problemas

1. Completa este cuadro:

Poliedro	Prisma	Pirámide	Poliedro regular	Número de caras	Número de aristas	Número de vértices	Nombre
		SÍ					

2. Dibuja un prisma recto hexagonal.

- ¿Cuántas caras laterales tiene?
- ¿Y aristas laterales? ¿Y aristas básicas?
- ¿Cuántos vértices tiene?

3. De los tres cuerpos redondos, ¿cuáles son desarrollables?

4. Dibuja un cilindro y un cono. Escribe el nombre de sus elementos.

5. Dibuja un cilindro cuyo diámetro de la base sea igual que la altura.

6. ¿Cómo se llama el segmento que une el centro de una esfera con un punto cualquiera de la superficie esférica?

7. ¿En qué se parecen las bases del cilindro y la base de un cono?

8. Dibuja un cono cuyo radio de la base sea mayor que la altura y otro cuya altura sea mayor que el radio de la base.

9. Dibuja el desarrollo de un cono y el de un cilindro.

10. Haz con plastilina un cono, un cilindro y una esfera.

MATEMÁTICAS 5

EGB CICLO MEDIO

El material didáctico para el Ciclo Medio de Educación General Básica ha sido creado en el Departamento de Investigaciones Educativas de Santillana, S. A. bajo la dirección de **Antonio Ramos**

El material de MATEMÁTICAS para el quinto curso ha sido programado y elaborado por el siguiente equipo **José Gil Martos**
Jaime Mascaró

Dirección editorial **Julián Abad**

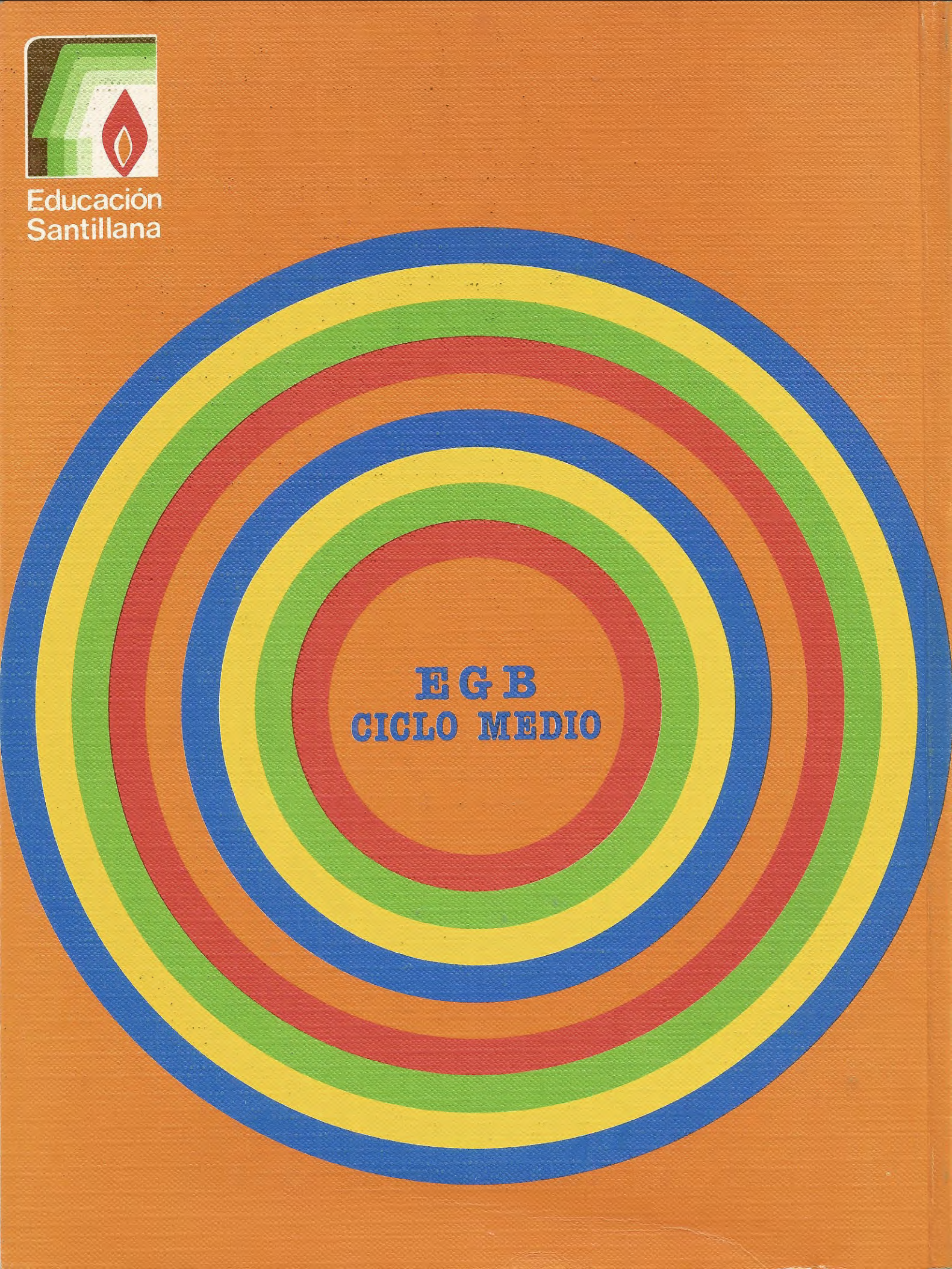
Ilustraciones **Rafael Ortega**
Juan Carlos Sanz

santillana

©1982 by SANTILLANA, S. A.
Elfo, 32 - Madrid-27
PRINTED IN SPAIN
Impreso en España en los
Talleres Gráficos Mateu Cromo, S. A.
Ctra. de Pinto a Fuenlabrada, s/n. Pinto (Madrid)
ISBN: 84-294-2008-8
Depósito Legal: M. 5-1983

Texto aprobado por el Ministerio de Educación y Ciencia en O. M. de 4-6-1982

La realización gráfica y editorial del libro MATEMÁTICAS ha sido efectuado en el equipo de Ediciones Santillana por los siguientes especialistas, bajo la dirección técnica de Francisco Romero: *Diseño*: Jose Luis García, Jose Huertas, David Cabacas y Jesus Perez. *Confección y montaje*: Lucio Gómez y Francisco Lopez. Corrector: Eugenio Miguel. *Coordinación técnica*: Julio Fernandez. *Coordinación artística*: Pedro García.


Educación
Santillana
E G B
CICLO MEDIO